

سامانه بانک تستی

FlowRax

فـ لـ

Math

@Flow_KonKour



@LoPRax_KonKour



کلیک کن وباماهمراه شو!

۱

با توجه به فرض، $f'(2) = 2$ و $f(2) = 0$ است. پس $f(x)$ در تابع $g(x)$ برای $x = 2$ یک عامل صفرکننده است و در نتیجه فقط از آن مشتق می‌گیریم:

$$g'(2) = \frac{f'(2)\sqrt{x^3+1}}{3x-5} \Big|_{x=2} = \frac{2f'(2)}{1} = 6$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲

اگر فرض کنیم $h = \frac{1}{t}$ ، آن‌گاه $t = \frac{1}{h}$ و $h \rightarrow 0^-$ ، بنابراین:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} t \left(f\left(1 - \frac{1}{t}\right) - f \right) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} -\frac{1}{h} (f(1+h) - f) \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -f'_-(1) \end{aligned}$$

از طرف دیگر، اگر $x \leq 1$ ، آن‌گاه:

$$f(x) = 2x^3 + 2x \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 2 \Rightarrow f'_-(1) = 6 + 2 = 8$$

بنابراین مقدار حد موردنظر برابر -8 است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ \frac{4}{\sqrt{(x-9)^2}} - 1 & x > 1 \end{cases}$$

توجه کنید که:

$$f'_+(1) = 0, \quad f'_-(1) = 2, \quad f'(9) = \infty, \quad f'(0) = 0$$

بنابراین:

پس معادله خطوط مماس در نقطه $x = 0$ و $x = 9$ به ترتیب به صورت $y = f(0) = -26$ و $x = 9$ است. همچنین معادله نیم‌مماس چپ در $x = 1$ به صورت زیر است:

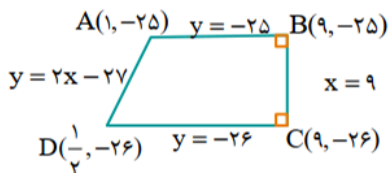
$$y - f(1) = f'_-(1)(x - 1) \Rightarrow y + 25 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 27$$

و معادله نیم‌مماس راست در $x = 1$ به صورت زیر است:

$$y - f(1) = f'_+(1)(x - 1) \Rightarrow y + 25 = 0(x - 1) \Rightarrow y = -25$$

بنابراین چهارضلعی موردنظر به صورت زیر می‌باشد.

مساحت دوزنقه ABCD برابر است با:



$$\frac{(\lambda + \lambda + \frac{1}{2}) \times 1}{2} = \frac{23}{4}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴

تابع $y = \frac{1}{2 + \sqrt[3]{x^2 - 4}}$ در نقاط $x = 2$ و $x = -2$ مشتق‌ناپذیر است و تابع $y = x^3 + ax^2 + bx - 16$ در تمام نقاط، مشتق‌پذیر است. بنابراین تابع

$$f(x) = (x^3 + ax^2 + bx - 16) \frac{1}{2 + \sqrt[3]{x^2 - 4}}$$

در تمام نقاط بجز $x = 2$ و $x = -2$ مشتق‌پذیر است.

برای اینکه f در این نقاط مشتق‌پذیر باشد، لازم است که مقدار تابع $y = x^3 + ax^2 + bx - 16$ در این نقاط صفر شود:

$$x = 2 \Rightarrow 8 + 4a + 2b - 16 = 0 \Rightarrow 2a + b = 4$$

$$x = -2 \Rightarrow -8 + 4a - 2b - 16 = 0 \Rightarrow 2a - b = 12$$

$$\Rightarrow 4a = 16 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow ab = -16$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵

تابع $\sqrt[3]{x-3}$ در $x=3$ دارای خط مماس قائم است. پس اختلاف ریشه‌های عبارت زیر رادیکال، ۱ واحد است:

$$-x^2 + ax - 6 = 0 \xrightarrow{\text{اختلاف ریشه‌ها}} \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = |a|$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 - 24} = 1 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = \pm 5 \xrightarrow{a > 0} a = 5$$

چون خطوط داده شده در گزینه‌ها افقی هستند، مقدار مشتق را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = \frac{-2x+5}{3\sqrt[3]{(-x^2+5x-6)^2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt[3]{-\frac{25}{4} + \frac{25}{2} - 6} = \sqrt[3]{\frac{-25+50-24}{4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$\left(f(\sqrt{x^2+2x})\right)' = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} f'(\sqrt{x^2+2x}) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} f'(\sqrt{x^2+2x})$$

برای محاسبه $\frac{f'(\sqrt{x^2+2x})}{\sqrt{x^2+2x}}(x+1)$ کافیست مشتق $f(\sqrt{x^2+2x})$ را محاسبه کنیم:

$$f(\sqrt{x^2+2x}) = \sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$$

در همسایگی $x = -3$ عبارت $x+1$ منفی است. بنابراین:

$$f(\sqrt{x^2+2x}) = -x-1 \Rightarrow \left(f(\sqrt{x^2+2x})\right)' = -1$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

اگر f از درجه n باشد، آن‌گاه f' و f'' از درجه $n-1$ و $n-2$ و f''' از درجه $(n-1)(n-2)$ است. از طرفی، f''' از درجه صفر است. بنابراین $n=2$ است.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 2a$$

$$f'''(x) = f'(1) - f'(0)$$

$$\Rightarrow 2a(2a) + b = a + b + c - c \Rightarrow 4a^2 = a \Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow f''(1) = 2a = \frac{1}{2}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶

۷

نکته: شیب خط مماس بر نمودار یک تابع در نقطه‌ای به طول a برابر مشتق آن تابع در a است.

نکته: حد زیر را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

خط $y = 3x - 6$ بر تابع $f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x = 2$ مماس است، پس نقطه‌ای به طول $x = 2$ نقطه تماس است و داریم:

$$y = 3x - 6 \xrightarrow{x=2} y = 0 \Rightarrow \text{نقطه تماس } A(2, 0) \Rightarrow f(2) = 0$$

شیب خط $y = 3x - 6$ برابر ۳ است، پس شیب خط مماس در نقطه A برابر ۳ است. بنابراین $f'(2) = 3$.

اکنون با تغییر متغیر $\frac{1}{x} = h$ حاصل حد را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{x} = h \Rightarrow x \rightarrow +\infty \Rightarrow h \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f\left(\frac{2x+1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x f\left(2 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(2+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 0}{h} = \frac{f(2) = 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2) = 3$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: مشتق تابع f در $x = a$ برابر است با:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

با توجه به شکل، خط d در نقطه $x = 2$ بر تابع f مماس است، پس شیب این خط همان $f'(2)$ است.

خط d از نقاط $(4, 0)$ و $(0, 3)$ عبور می‌کند، بنابراین معادله آن به صورت $y = -\frac{3}{4}x + 3$ است. پس $f'(2) = -\frac{3}{4}$ و $f(2) = \frac{3}{2}$.

اکنون حاصل حدهای خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{2h} = -\frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+(-h)) - f(2)}{-h} = -\frac{1}{2} f'(2) = -\frac{1}{2} \times -\frac{3}{4} = \frac{3}{8} = L$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - f^2(2)}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + f(2)}{x + 2} = f'(2) \times \frac{3}{4} = -\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = -\frac{9}{16} = L'$$

بنابراین:

$$L - L' = \frac{3}{8} + \frac{9}{16} = \frac{15}{16}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته (قضیه): اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه f در a پیوسته است.

نکته: اگر تابع f در نقطه‌ای به طول a مشتق پذیر باشد، مشتق چپ و راست تابع در این نقطه موجود و برابر است.

نکته: آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a, a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازه } [a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

تابع $y = \sqrt[3]{x-2}$ در $x=2$ مماس قائم دارد و مشتق پذیر نیست ولی دامنه ضابطه اول، $x < 1$ است و شامل $x=2$ نمی‌شود. پس باید تابع f در نقطه مرزی $x=1$ ، پیوسته و مشتق پذیر باشد.

پیوستگی در نقطه $x=1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt[3]{x-2} + b = -3 + b \\ f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ax + 2 = a + 2 \end{cases} \Rightarrow -3 + b = a + 2 \Rightarrow a - b = -5 \quad (1)$$

مشتق پذیری در $x=1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 3 \times \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} & ; x < 1 \\ a & ; x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'_-(1) = 1, f'_+(1) = a$$

$$\text{شرط مشتق پذیری: } f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow a = 1 \xrightarrow{(1)} 1 - b = -5 \Rightarrow b = 6$$

بنابراین ضابطه f به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} + 6 & ; x < 1 \\ x + 2 & ; x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(-6) = \sqrt[3]{-6-2} + 6 = 0, \quad f(2) = 4$$

اکنون داریم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازه } [-6, 2] = \frac{f(2) - f(-6)}{2 - (-6)} = \frac{4 - 0}{8} = \frac{1}{2} = 0.5$$

بنابراین:

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

نکته: اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $x > 0$ ، آنگاه $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

نکته: مشتق تابع f در $x = a$ برابر است با:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ابتدا $f(1)$ را به دست می آوریم:

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{-x + 3} \Rightarrow f(1) = 1$$

پس حد داده شده به صورت $\frac{0}{0}$ است، در نتیجه صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت و مزدوج مخرج ضرب می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{\sqrt{f(x)} + 1}{\sqrt{f(x)} + 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{f(x)} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \underbrace{\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}}_{\text{تعریف مشتق در } x=1} \times \frac{2}{2} = f'(1)$$

حاصل حد خواسته شده همان $f'(1)$ است، بنابراین:

$$f'(x) = \frac{(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}})(-x + 3) - (-1)(x^2 + \sqrt{x})}{(-x + 3)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{(2 + \frac{1}{2})(2) - (-1)(2)}{4} = \frac{7}{4}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: اگر f تابعی بر حسب u و u تابعی از x باشد، آنگاه:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

نکته: اگر $f(x) = \sqrt{ax+b}$ و $ax+b > 0$ ، آنگاه: $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

ابتدا دامنه تابع f را تعیین می کنیم:

$$-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, 0]$$

بنابراین در این دامنه $|x| = -x$ است و داریم:

$$f(x) = -x + 2\sqrt{-x}$$

اکنون با تشکیل اتحاد مربع دو جمله ای، f^{-1} را به دست می آوریم:

$$y = -x + 2\sqrt{-x} + 1 - 1 = (\sqrt{-x} + 1)^2 - 1 \Rightarrow y + 1 = (\sqrt{-x} + 1)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{y+1} = \underbrace{|\sqrt{-x} + 1|}_{+} \Rightarrow \sqrt{y+1} = \sqrt{-x} + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{-x} = \sqrt{y+1} - 1 \xrightarrow{\text{توان } 2} -x = (\sqrt{y+1} - 1)^2 \Rightarrow x = -(\sqrt{y+1} - 1)^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -(\sqrt{x+1} - 1)^2$$

$$\Rightarrow (f^{-1}(x))' = -2(\sqrt{x+1} - 1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) \Rightarrow (f^{-1})'(3) = -2(\sqrt{4} - 1)\left(\frac{1}{2\sqrt{4}}\right) = -\frac{1}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۳

نکته: اگر f تابعی بر حسب u و u تابعی از x باشد: $y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$

نکته: $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

نکته: اگر $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ، آنگاه: $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

چون خط d در نقطه $(-3, 1)$ بر تابع f مماس است، پس شیب این خط برابر $f'(-3)$ و مقدار تابع در $x = -3$ همان عدد یک است. بنابراین:

$$f'(-3) = -\frac{1}{3}, \quad f(-3) = 1$$

اکنون $g'(3)$ را به دست می آوریم:

$$g(x) = \frac{f(-x)}{\sqrt[3]{9x}} \Rightarrow g'(x) = \frac{((-1)f'(-x) \times \sqrt[3]{9x}) - (\frac{9}{\sqrt[3]{(9x)^2}} \times f(-x))}{(\sqrt[3]{9x})^2}$$

$$\xrightarrow{x=3} g'(3) = \frac{-f'(-3) \times \sqrt[3]{27} - \frac{9}{\sqrt[3]{(27)^2}} \times f(-3)}{(\sqrt[3]{27})^2} \quad \frac{f'(-3) = -\frac{1}{3}}{f(-3)=1} \rightarrow g'(3) = \frac{\frac{1}{3} \times 3 - \frac{1}{3} \times 1}{9} = \frac{\frac{2}{3}}{9} = \frac{2}{27}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۴

نکته: اگر f تابعی بر حسب u و u تابعی از x باشد: $y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$

نکته: $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

ابتدا از تابع $y = f(xf(x))$ ، مشتق می گیریم:

$$y' = (x \cdot f(x))'f'(xf(x)) \Rightarrow y' = (f(x) + xf'(x))f'(xf(x)) \xrightarrow{x=-1} y'(-1) = (f(-1) + (-1)f'(-1))f'(-f(-1)) \quad (1)$$

اکنون داریم:

$$f(x) = x^2 + \frac{3}{x} \Rightarrow f'(x) = 2x - \frac{3}{x^2}$$

$$f(-1) = 1 + \frac{3}{-1} = -2, \quad f'(-1) = -2 - \frac{3}{1} = -5$$

$$(1) \Rightarrow y'(-1) = (-2 + 5)f'(2) = 3f'(2) \quad (*)$$

پس کافی است $f'(2)$ را به دست آوریم:

$$f'(x) = 2x - \frac{3}{x^2} \Rightarrow f'(2) = 4 - \frac{3}{4} = \frac{13}{4}$$

بنابراین:

$$(*) \Rightarrow y'(-1) = 3f'(2) = 3 \times \frac{13}{4} = \frac{39}{4}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a, a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازه } [a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

نکته: آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x = a \quad \text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f \text{ در نقطه } x = a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \sqrt{-x^2 + 8x + 9}$ در بازه $[0, 4]$ برابر است با:

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{\sqrt{-16 + 32 + 9} - \sqrt{9}}{4} = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{9}}{4} = \frac{5 - 3}{4} = \frac{1}{2}$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = \sqrt{-x^2 + 8x + 9}$ در نقطه $x = \alpha$ برابر است با:

$$f'(\alpha) = \frac{-2\alpha + 8}{2\sqrt{-\alpha^2 + 8\alpha + 9}} = \frac{-\alpha + 4}{\sqrt{-\alpha^2 + 8\alpha + 9}}$$

حالا باید $\frac{1}{2}$ را با $f'(\alpha)$ برابر قرار دهیم:

$$\frac{-\alpha + 4}{\sqrt{-\alpha^2 + 8\alpha + 9}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underbrace{-2\alpha + 8 = \sqrt{-\alpha^2 + 8\alpha + 9}}_{(*)} \xrightarrow[\alpha \leq 4]{\text{توان } 2} 4\alpha^2 - 32\alpha + 64 = -\alpha^2 + 8\alpha + 9$$

$$5\alpha^2 - 40\alpha + 55 = 0 \xrightarrow{\div 5} \alpha^2 - 8\alpha + 11 = 0 \xrightarrow{+5} \alpha^2 - 8\alpha + 16 = 5 \Rightarrow (\alpha - 4)^2 = 5 \Rightarrow \alpha - 4 = \pm\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \alpha = 4 \pm \sqrt{5} \xrightarrow{\alpha \leq 4} \alpha = 4 - \sqrt{5}$$

دقت کنید: به ازای $\alpha = 4 + \sqrt{5}$ ، عبارت سمت چپ در تساوی $(*)$ منفی می‌شود، پس این جواب قابل قبول نیست و فقط $\alpha = 4 - \sqrt{5}$ قبول است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: مشتق تابع f در $x = a$ برابر است با:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

نکته: شیب خط مماس بر نمودار یک تابع در نقطه‌ای به طول a برابر مشتق آن تابع در a است.

ابتدا معادله خط گذرنده از دو نقطه $(1, -1)$ و $(-4, 9)$ را به دست می‌آوریم.

$$\text{معادله خط مماس } m = \frac{9 - (-1)}{-4 - 1} = -2 \xrightarrow{(1, -1)} y = -2x + 1$$

پس $f(-1) = 3$. همچنین مشتق تابع برابر شیب خط مماس است، پس $f'(-1) = -2$ ؛ بنابراین حاصل حد خواسته شده برابر است با:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f^2(x) - f(x) - 6}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(f(x) - 3)(f(x) + 2)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \times \lim_{x \rightarrow -1} (f(x) + 2) \\ &= f'(-1) \times (f(-1) + 2) = -2 \times (3 + 2) = -2 \times 5 = -10 \end{aligned}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$۱ \text{ نکته: } y = \sqrt{u}, u \geq 0 \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, y = u^n \Rightarrow y' = nu'u^{n-1}$$

$$۲ \text{ نکته: } h(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

$$f'(x) \cdot f'(x) + f''(x) \cdot f(x) = (f(x) \cdot f'(x))'$$

با توجه به خواسته سؤال داریم:

بنابراین خواسته سؤال، مشتق تابع $(f \cdot f')(x)$ است.

$$f(x) = \sqrt{u} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \Rightarrow f \cdot f' = \sqrt{u} \cdot \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{u'}{2}$$

بنابراین $f \cdot f'$ ، با نصف مشتق تابع زیر رادیکال یعنی نصف مشتق $\frac{2x^3+1}{x^3} + 9$ برابر است:

$$u = \frac{2x^3+1}{x^3} + 9 \Rightarrow u = 2 + x^{-3} + 9 = 11 + x^{-3} \Rightarrow u' = -3x^{-4} \Rightarrow \frac{u'}{2} = -\frac{3}{2}x^{-4}$$

$$y = (f \cdot f')(x) = \left(-\frac{3}{2}x^{-4}\right) \Rightarrow y' = (f \cdot f')'(x) = 6x^{-5} = \frac{6}{x^5}$$

بنابراین:

$$x = \sqrt[5]{2} \Rightarrow (f \cdot f')'(\sqrt[5]{2}) = \frac{6}{(\sqrt[5]{2})^5} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است، هرگاه در هر نقطه بازه (a, b) مشتق پذیر بوده و در $x = a$ مشتق راست داشته باشد.

ابتدا با استفاده از تعریف جزء صحیح، تابع f را بازنویسی می کنیم:

$$[x] = \begin{cases} 2 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2(x^2 + ax + b) & 2 \leq x < 3 \\ x^2 + ax + b & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

تابع f باید در $x = 1$ مشتق راست داشته باشد. می دانیم $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ ، پس f در $x = 1$ از راست پیوسته بوده و با توجه به ضابطه تابع

$$\text{در } x = 1 \text{ مشتق راست دارد: } f'_+(1) = 2 + a$$

همچنین واضح است که تابع f در تمامی نقاط بازه های $(1, 2)$ و $(2, 3)$ مشتق پذیر است. بنابراین فقط باید در نقطه $x = 2$ مشتق پذیر باشد.

در نتیجه f باید در $x = 2$ پیوسته باشد که داریم:

$$\text{در } x = 2 \text{ پیوسته است } f: \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Rightarrow 2(4 + 2a + b) = 4 + 2a + b \Rightarrow 2a + b = -4 \quad (I)$$

همچنین مشتق راست و چپ f در $x = 2$ باید برابر باشند:

$$f'(x) = \begin{cases} 2(2x + a) & 2 < x < 3 \\ 2x + a & 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow 2(4 + a) = 4 + a \Rightarrow 4 + a = 0 \Rightarrow a = -4$$

$$(I): 2a + b = -4 \xrightarrow{a=-4} -8 + b = -4 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a + b = 0$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: مشتق راست تابع f در $x = a$ برابر است با:

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

نکته: مشتق چپ تابع f در $x = a$ برابر است با:

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

تابع f در $x = 1$ پیوسته است، پس ابتدا مشتق راست و چپ تابع f را در $x = 1$ محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x \geq 1 \\ \frac{3}{x} & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & x > 1 \\ -\frac{3}{x^2} & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = 2 \times 1 + 2 = 4 \\ f'_-(1) = -\frac{3}{1^2} = -3 \end{cases}$$

اکنون به محاسبه حد موردنظر می‌پردازیم:

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h^2) - f(1-h^2)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h^2) - f(1) + f(1) - f(1-h^2)}{h^2} = 3 \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h^2) - f(1)}{3h^2} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h^2) - f(1)}{-h^2}$$

با تغییر متغیر $3h^2 = t$ ، حد اول را محاسبه می‌کنیم. مشخص است که وقتی $h \rightarrow 0$ ، آنگاه $3h^2 \rightarrow 0^+$ ، پس:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h^2) - f(1)}{3h^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} = f'_+(1) = 4$$

همچنین با تغییر متغیر $-h^2 = t$ ، حد دوم را محاسبه می‌کنیم. هنگامی که $h \rightarrow 0$ آنگاه $-h^2 \rightarrow 0^-$ ، پس:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h^2) - f(1)}{-h^2} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} = f'_-(1) = -3$$

بنابراین حد خواسته شده برابر است با:

$$A = 3f'_+(1) + f'_-(1) = 3 \times 4 - 3 = 12 - 3 = 9$$

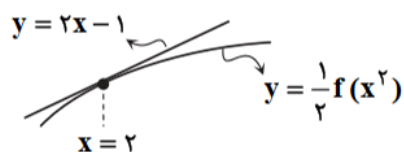
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: $(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$

نکته: $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

نکته: شیب خط مماس بر منحنی $f(x)$ در $x = \alpha$ برابر $f'(\alpha)$ است.

اگر خط $y = 2x - 1$ در $x = 2$ بر $y = \frac{1}{3}f(x^2)$ مماس باشد، داریم:



$$\begin{cases} \text{عرض نقطه} = 3 = \frac{1}{3}f(4) \Rightarrow f(4) = 6 \\ y = \frac{1}{3}f(x^2) \Rightarrow y' = \frac{1}{3} \times 2x \times f'(x^2) \xrightarrow{\substack{x=2 \\ y'=2}} 2 = 2f'(4) \Rightarrow f'(4) = 1 \end{cases}$$

از طرفی شیب خط مماس بر تابع $g(x) = \frac{f(4\sqrt{x})}{x^3}$ در $x = 1$ برابر $g'(1)$ است و داریم:

$$g'(x) = \frac{\frac{4}{2\sqrt{x}} f'(4\sqrt{x}) x^3 - 3x^2 f(4\sqrt{x})}{x^6} \xrightarrow{x=1} g'(1) = 2f'(4) - 3f(4) = 2 \times 1 - 3 \times 6 = 2 - 18 = -16$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

نکته: اگر $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ، آنگاه: $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

نکته: اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب $f \circ g$ مشتق پذیر است و داریم:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

نکته: اگر f تابعی بر حسب u و u تابعی از x باشد:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

ابتدا داریم:

$$y = f^{\sqrt{}}(x) \Rightarrow y' = \sqrt{f(x)}f'(x)$$

با توجه به قواعد مشتق گیری، مشتق تابع داده شده را به دست می آوریم:

$$y = \frac{f^{\sqrt{}}(g(x))}{\sqrt[3]{x^2 + 7}} \Rightarrow y' = \frac{\sqrt{f(g(x))} \cdot f'(g(x)) \cdot g'(x) \sqrt[3]{x^2 + 7} - \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{(x^2 + 7)^2}}\right)(f^{\sqrt{}}(g(x)))}{(\sqrt[3]{x^2 + 7})^2}$$

اکنون مشتق تابع را به ازای $x = 1$ به دست می آوریم:

$$x = 1 \Rightarrow y' = \frac{\sqrt{f(g(1))} \cdot f'(g(1))g'(1)\sqrt[3]{8} - \left(\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{8^2}}\right)(f^{\sqrt{}}(g(1)))}{(\sqrt[3]{8})^2}$$

حال با توجه به معلومات مسئله داریم:

$$y' = \frac{\sqrt{f(1)}f'(1)g'(1) \times 2 - \frac{1}{6}f^{\sqrt{}}(1)}{4} = \frac{2 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 - \frac{1}{6} \times 1}{4} = \frac{95}{24}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: شیب خط مماس بر نمودار یک تابع در نقطه‌ای به طول a ، برابر مشتق آن تابع در a است.

نکته: مشتق تابع f در $x = a$ برابر است با:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

نکته: مشتق تابع f در $x = a$ برابر است با:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

با توجه به شکل، $f(2) = k$. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - k}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{(x-2)(x+2)} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{5}{8} \Rightarrow f'(2) \times \frac{1}{4} = \frac{5}{8} \Rightarrow f'(2) = \frac{5}{2}$$

خط d در $x = 2$ بر تابع f مماس است، پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} m_d = f'(2) = \frac{5}{2} \\ (0,0) \in d \end{array} \right\} \Rightarrow y = \frac{5}{2}x \xrightarrow{x=2} y = 5 \xrightarrow{f(2)=k} k = 5$$

با توجه به مقدار k ، واضح است که خط d' از نقطه‌های $(5,4)$ و $(0,0)$ عبور می‌کند؛ بنابراین:

$$m_{d'} = \frac{4-0}{5-0} = \frac{4}{5}$$

خط d' بر تابع f مماس است پس $f'(5) = \frac{4}{5}$. حال داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{2h} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \frac{1}{2} f'(5) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = 0.4$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

نکته: $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

نکته: اگر $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ، آنگاه:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

نکته: اگر f تابعی بر حسب u و u تابعی از x باشد:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

$g'(x)$ را به دست می آوریم:

$$g(x) = f(x + \sqrt{x}) \Rightarrow g'(x) = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)f'(x + \sqrt{x})$$

اکنون به ازای $x = 1$ داریم:

$$x = 1 \Rightarrow g'(1) = \frac{3}{2}f'(2)$$

پس باید $f'(2)$ را محاسبه کنیم:

راه حل اول:

$$f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)(\sqrt[3]{3x+2}) \Rightarrow f'(x) = \left(2x + \frac{1}{x^2}\right)(\sqrt[3]{3x+2}) + \left(\frac{3}{3\sqrt[3]{(3x+2)^2}}\right)\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)$$

$$\xrightarrow{x=2} f'(2) = \left(4 + \frac{1}{4}\right)(\sqrt[3]{8}) + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}}\right)\left(4 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow f'(2) = 12$$

اکنون داریم:

$$g'(1) = \frac{3}{2}f'(2) = \frac{3}{2} \times 12 = 18$$

راه حل دوم:

نکته: اگر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ و $f(a) = 0$ و $f'(a)$ و $g'(a)$ موجود باشند، آنگاه:

$$h'(a) = \underbrace{f'(a)}_{\text{مشتق عامل صفرکننده}} \cdot g(a)$$

می خواهیم $f'(2)$ را به دست آوریم. از طرفی $x^2 - \frac{1}{x}$ به ازای $x = 2$ برابر صفر است، بنابراین کافی است مشتق عامل صفرکننده را به دست آوریم:

$$f(x) = \underbrace{\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)}_{\text{عامل صفرکننده}} (\sqrt[3]{3x+2})$$

$$\text{مشتق عامل صفرکننده} = 2x + \frac{1}{x^2}$$

بنابراین:

$$f'(2) = \left(4 + \frac{1}{4}\right)(\sqrt[3]{8}) \Rightarrow f'(2) = 12$$

پس:

$$g'(1) = \frac{3}{2}f'(2) = \frac{3}{2} \times 12 = 18$$

۲۴

عبارت داخل قدرمطلق یک عبارت درجه دوم است. اگر این تابع در دو نقطه محور طول‌ها را قطع کند، تابع در آن دو نقطه مشتق‌ناپذیر است، اما اگر در یک نقطه بر محور طول‌ها مماس شود یا محور طول‌ها را قطع نکند، تابع در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. نمودار تابع $y = |ax^2 + bx + c|$ به یکی از سه شکل روبه‌رو است: پس در حالت $\Delta \leq 0$ تابع مشتق‌پذیر است:



$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 4(m-2)^2 - 4(m+1) \leq 0 \Rightarrow 4(m^2 - 4m + 4 - m - 1) \leq 0 \Rightarrow m^2 - 5m + 3 \leq 0 \Rightarrow (m-6)(m+1) \leq 0$$

$$\frac{m}{(m-6)(m+1)} \quad \begin{array}{c|cc} & -1 & 6 \\ \hline & + & - & + \end{array} \Rightarrow m \in [-1, 6]$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۵

شرط لازم برای مشتق‌پذیری تابع، پیوستگی در $x=1$ است.

$$f(1)=2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)=2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)=a-b=2$$

$$f'_-(1) = f'_+(1) \quad f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x}} \Rightarrow f'_+(1) = -1$$

$$f(x) = ax^2 + \frac{b}{x-2} \Rightarrow f'(x) = 2ax - \frac{b}{(x-2)^2} \Rightarrow f'_-(1) = 2a-b$$

$$\begin{cases} 2a-b = -1 \Rightarrow a = -3 \\ a-b = 2 \Rightarrow b = -5 \end{cases} \Rightarrow b+a = -8$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۶

نکته: اگر f تابعی یک‌به‌یک باشد، آنگاه: $x \in D_{f^{-1}}$ و $(fof^{-1})(x) = x$

نکته: اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(fog)'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

نکته: برای به‌دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f ، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x ، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

ابتدا وارون f را به‌دست می‌آوریم. زیرا محاسبه مشتق خواسته شده در $x = \sqrt{6}$ دشوار است.

$$y = f(x) = x + 2\sqrt{x} \Rightarrow y+1 = x + 2\sqrt{x} + 1 \Rightarrow y+1 = (\sqrt{x}+1)^2 \Rightarrow \sqrt{y+1} = \underbrace{|\sqrt{x}+1|}_{+} \Rightarrow \sqrt{y+1} - 1 = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{y+1} - 1)^2 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^2 = g(x)$$

بنابراین توابع f و g وارون یکدیگر هستند. پس داریم:

$$(fog)(x) = f(f^{-1}(x)) = x$$

اکنون خواسته سؤال را به‌دست می‌آوریم:

$$(fog)(x) = x \Rightarrow (fog)'(x) = 1 \Rightarrow g'(x)f'(g(x)) = 1 \Rightarrow g'(\sqrt{6})f'(g(\sqrt{6})) = 1$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: اگر g و f مشتق پذیر باشند، داریم:

$$y = f^n(x) \Rightarrow y' = n \cdot f'(x) \cdot f^{n-1}(x)$$

$$\text{نکته: } y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

با توجه به اطلاعات مسئله، مشتق تابع y را پیدا و در نقطه $x=2$ محاسبه می‌کنیم:

$$f'(2) = 6, f(2) = 2, g(2) = -4$$

$$y = \frac{f^2(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{2f'(x) \cdot f(x) \cdot g(x) - g'(x)f^2(x)}{g^2(x)}$$

$$x=2 \Rightarrow y' = \frac{2f'(2)f(2)g(2) - g'(2)f^2(2)}{g^2(2)} = -8$$

$$\Rightarrow \frac{2 \times 6 \times 2 \times (-4) - g'(2) \times 4}{16} = -8 \Rightarrow -6 - \frac{g'(2)}{4} = -8 \Rightarrow g'(2) = 8$$

حال با فرض $3h = t$ داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+3h) - g(2)}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(2+t) - g(2)}{\frac{1}{3}t} = 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(2+t) - g(2)}{t} = 3g'(2) = 3 \times 8 = 24$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

سرنخ

نقاطی از دامنه توابع f را بیابید که مشتق در این نقاط منفی باشد.

$$(-5, 7) \rightarrow 7 - (-5) - 1 = 11$$

پله اول: ابتدا تعداد نقاط صحیح در بازه $(-5, 7)$ را پیدا می‌کنیم:

پله دوم: حال باید از $f(x)$ مشتق گرفته و تعداد نقاط صحیحی که $f'(x) < 0$ است را پیدا کنیم، بنابراین:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x - 1 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 3(x^2 - 4x - 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \end{cases}$$

x		-1		5	
$f'(x)$	+	○	-	○	+

پس طول نقاط صحیحی که $f'(x) < 0$ باشد برابر است با $x = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ که شامل ۵ عدد است در نتیجه خواهیم داشت:

پله سوم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \rightarrow P(A) = \frac{5}{11}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۹

سرنخ

ببینید در کدام محدوده مقدار تابع و شیب خط مماس بر منحنی مختلف‌العلامت هستند.

روش اول: برای حل نامعادله $f(x).f'(x) < 0$ ابتدا باید ریشه‌های دو عبارت را به دست آوریم و تعیین علامت کنیم، پس داریم:

$$f(x)f'(x) < 0 \rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \rightarrow x = -3, 1, 4 \\ f'(x) = 0 \rightarrow x = -1, 2 \end{cases}$$

	-3	-1	1	2	4	
$f(x)$	+	+	+	-	+	
$f'(x)$	+	+	-	-	+	
$f(x).f'(x)$	+	+	-	+	-	+

پس بازه جواب ما برابر است با: $(-1, 1) \cup (2, 4)$.

روش دوم: بازه‌هایی که در آنها مقدار تابع و شیب خط مماس بر منحنی مختلف‌العلامت هستند، جواب مسئله است. در بازه $(-1, 1)$ مقدار تابع مثبت و شیب خط مماس منفی است و در بازه $(2, 4)$ مقدار تابع منفی و شیب خط مماس مثبت است. پس مجموعه $(-1, 1) \cup (2, 4)$ پاسخ سوال است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۰

چون حاصل حد $\frac{0}{0}$ است، ابتدا حاصل حد خواسته شده را با کمک قاعده هوییتال به دست می‌آوریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\lambda - f(2 - 3h^2)}{h^2} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6hf'(2 - 3h^2)}{2h}$$

$$\lim_{h^2 \rightarrow 0^+} 3f'(2 - 3h^2) = 3f'_-(2)$$

حال ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = x^2[-x] + \sqrt{\frac{x^2 - 4x + 4}{(x-2)^2}} = x^2[-x] + |x-2|$$

برای محاسبه مشتق چپ تابع در $x=2$ داریم:

$$x < 2: -x > -2 \Rightarrow [-x] = -2 \Rightarrow f(x) = x^2[-x] + \overline{x-2} \Rightarrow f(x) = -2x^2 - x + 2 \Rightarrow f'(x) = -4x - 1 \Rightarrow f'_-(2) = -9$$

$$3f'_-(2) = 3(-9) = -27$$

پس حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۱

از آنجایی که خط d بر تابع $f(x)$ در $x=3$ مماس است خواهیم داشت:

$$d(3) = f(3) = 1$$

$$f'(3) = m_d \rightarrow f'(3) = \frac{1-0}{3-1} = \frac{1}{2}$$

حال برای محاسبه $g'(\Delta)$ داریم:

$$g(2x-1) = \frac{f^2(x)}{x} \rightarrow 2 \times g'(2x-1) = \frac{2 \times f(x) \times f'(x) \times x - f^2(x) \times 1}{x^2} \xrightarrow{x=3} 2g'(\Delta) = \frac{2f(3)f'(3) \times 3 - f^2(3)}{3^2}$$

$$\rightarrow 2g'(\Delta) = \frac{2 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 3 - 1}{9} \rightarrow 2g'(\Delta) = \frac{2}{9} \rightarrow g'(\Delta) = \frac{1}{9}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۲

پله اول: با جایگذاری $x = 3$ در حد داده شده مخرج برابر صفر می‌شود و چون حد وجود دارد و مقدار آن حقیقی است بنابراین صورت کسر به ازای $x = 3$ برابر صفر می‌شود.

$$3f(3) + g(3) - 4 = 0$$

$$3f(3) = 4 \Rightarrow f(3) = g(3) = 1$$

$f(x)$ و $g(x)$ در $x = 3$ بر هم مماس‌اند بنابراین $g(3) = f(3)$:

پله دوم: حال معادله تابع خطی $g(x)$ را می‌نویسیم:

$$y - 0 = \frac{1 - 0}{3 - (-3)}(x + 3) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}$$

پله سوم: حاصل حد خواسته شده را با استفاده از هوپیتال به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{xf(x) + g(x) - 4}{x - 3} &\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + xf'(x) + g'(x)}{1} \\ &= f(3) + 3f'(3) + g'(3) \xrightarrow{x=3 \text{ در } f \text{ و } g \text{ مماس‌اند}} 1 + 3 \times \left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۳

پله اول: ابتدا شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم. از این خط دو نقطه به مختصات $(2, 2)$ و $(0, a)$ داریم پس:

$$m = \frac{2 - a}{2 - 0} \Rightarrow m = \frac{2 - a}{2}$$

$$f'(2) = \frac{2 - a}{2}$$

پس مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x = 2$ برابر $\frac{2 - a}{2}$ می‌شود یعنی:

نمودار تابع f از نقطه $(2, 2)$ عبور می‌کند پس: $f(2) = 2$

پله دوم: حال با توجه به داده‌های سؤال شیب خط مماس بر نمودار $g(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = f(f(x)), x = 2 \Rightarrow g(2) = f(f(2)) = f(2) = 2$$

$g(x)$ از نقطه‌های $(2, 2)$ و $(0, -6)$ عبور می‌کند پس شیب آن برابر ۴ می‌شود.

پله سوم: می‌توان شیب خط مماس بر $g(x)$ را با استفاده از مشتق، به دست آورد که در آن از فرمول مشتق توابع مرکب استفاده می‌کنیم:

$$g(x) = f(f(x)) \Rightarrow g'(x) = f'(x) \times f'(f(x))$$

$$x = 2 \Rightarrow g'(2) = f'(2) \times f'(f(2)) = f'(2) \times f'(2)$$

$$\Rightarrow g'(2) = \frac{2 - a}{2} \times \frac{2 - a}{2}$$

پله چهارم: با توجه به پله سوم، شیب خط مماس بر $g(x)$ برابر ۴ است، پس داریم:

$$\frac{a - 2}{2} \times \frac{a - 2}{2} = 4 \Rightarrow (a - 2)^2 = 16 \Rightarrow a - 2 = \pm 4 \Rightarrow a = 2 \pm 4 \xrightarrow{a < 0} a = -2$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۴

پله اول: نمودار تابع $y = f'(x)$ به صورت تابعی خطی است، پس $f(x)$ تابعی درجه دوم می‌باشد.

دو نقطه از تابع خطی $y = f'(x)$ را داریم که می‌توان معادله آن را نوشت:

$$(-2, 0), (0, 2) \Rightarrow m = \frac{2-0}{0-(-2)} \Rightarrow m = 1$$

$$y - 0 = 1(x + 2) \Rightarrow y = x + 2 \Rightarrow f'(x) = x + 2$$

پله دوم: تابع درجه دوم به فرم $f(x) = ax^2 + bx + c$ است. که مشتق آن به صورت $f'(x) = 2ax + b$ می‌شود، پس داریم:

$$\begin{cases} f'(x) = x + 2 \\ f'(x) = 2ax + b \end{cases} \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + c$$

از طرفی $f(2) = 8$:

$$f(2) = 8 \Rightarrow x = 2, y = 8 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + 2x + c = 8$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(2)^2 + 2(2) + c = 8 \Rightarrow 2 + 4 + c = 8 \Rightarrow c = 2$$

پله سوم: در نتیجه ضابطه تابع $f(x)$ به شکل زیر است که با دو رابطه $y_s = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ یا $y_s = \frac{-\Delta}{4a}$ می‌توان کمترین یا بیشترین مقدار

تابع درجه دوم را حساب کرد. در اینجا $a > 0$ هست پس داریم: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$

$$x_s = -2 \Rightarrow y_s = f(-2) = 0$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۵

با توجه به ضابطه تابع $f(x) = x^2 + 3x + k$ نتیجه می‌گیریم $f'(x) = 2x + 3$. حال برای به دست آوردن حاصل ضرب ریشه‌های معادله $(g \circ f)'(x) = 0$ داریم:

$$(g \circ f)'(x) = 0 \Rightarrow g'(f(x))f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g'(f(x)) = 0 \xrightarrow{g'(r)=0} x^2 + 3x + k = 2 \\ \Rightarrow x^2 + 3x + k - 2 = 0 \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

حاصل ضرب ریشه‌های معادله $x^2 + 3x + k - 2 = 0$ برابر $x_1 x_2 = k - 2$ است، بنابراین حاصل ضرب ریشه‌های معادله $(g \circ f)'(x) = 0$ برابر است با:

$$(k - 2) \times -\frac{3}{2} = 9 \Rightarrow k - 2 = -6 \Rightarrow k = -4$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۶

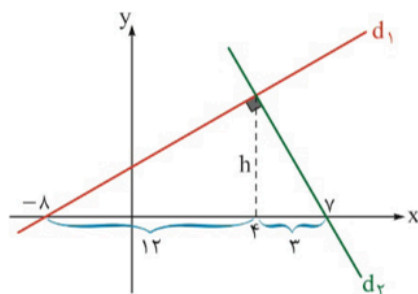
سرنخ

با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه مطابق شکل داریم:

$$h^2 = 3 \times 12 \rightarrow h = 6$$

از طرفی می‌دانیم خط d_1 در $x = 4$ بر $f(x)$ مماس است پس:

$$f'(4) = m_{d_1} = \frac{6 - 0}{4 - (-8)} = \frac{1}{2}$$



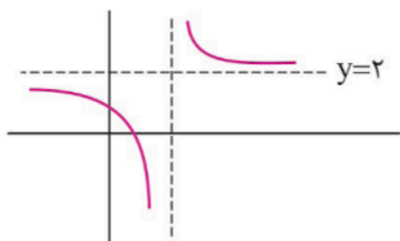
(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۷

سرنخ

با توجه به اینکه در همسایگی $x = k$ به دلیل مجهول بودن طول نقطه نمی‌توان $f(x)$ راتعیین علامت کرد پس تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:

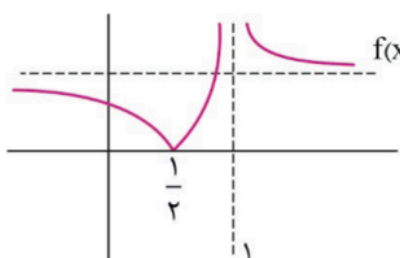
$$y = \frac{2x-1}{x-1}$$

با توجه به شکل مشخص است که شیب خط مماس بر تابع f در محدوده $\frac{1}{2} < x < 1$ می‌تواند مثبت باشد پس $k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ است.

$$f'(k) = \left(\frac{1-2x}{x-1} \right)'_{x=k} = \frac{1}{(k-1)^2} = 9$$

$$(k-1)^2 = \frac{1}{9} \rightarrow k-1 = \pm \frac{1}{3} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

$$f'\left(\frac{4}{9}\right) = \left(\frac{2x-1}{x-1} \right)'_{x=\frac{4}{9}} = \frac{-1}{(x-1)^2} \bigg|_{x=\frac{4}{9}} = \frac{-81}{25}$$



(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۸

سرنخ

با توجه به اینکه نمودار f' خط است، پس f' تابعی خطی بوده و $f(x)$ تابعی از درجه دوم است.چون نمودار تابع f' به صورت یک تابع خطی است، پس تابع f یک تابع درجه دو می‌باشد و ضابطه آن را به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ فرض می‌کنیم.از طرفی با توجه به نمودار داده شده $f'(0) = 2$ و $f'(-2) = 0$ است، پس:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(0) = 2a(0) + b = 2 \Rightarrow b = 2, f'(-2) = -4a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = \frac{1}{2}(2)^2 + 2(2) + c = 8 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$$

در ضمن $f(2) = 8$ است، پس:

$$f(-2) = \frac{1}{2}(-2)^2 + 2(-2) + 2 = 0$$

می‌دانیم کمترین مقدار تابع f به ازای $x_S = -\frac{b}{2a} = -2$ به دست می‌آید:

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۹

آهنگ متوسط تغییر تابع $y = f\left(\frac{x+1}{2}\right)$ را در بازه‌های خواسته شده پیدا می‌کنیم:

(۱) بازه $[1, 3]$:

$$\frac{f\left(\frac{3+1}{2}\right) - f\left(\frac{1+1}{2}\right)}{3-1} = 2 \Rightarrow f(2) - f(1) = 4$$

(۲) بازه $[3, 5]$:

$$\frac{f\left(\frac{5+1}{2}\right) - f\left(\frac{3+1}{2}\right)}{5-3} = 5 \Rightarrow f(3) - f(2) = 10$$

(۳) بازه $[5, 7]$:

$$\frac{f\left(\frac{7+1}{2}\right) - f\left(\frac{5+1}{2}\right)}{7-5} = 7 \Rightarrow f(4) - f(3) = 14$$

حالا روابط به‌دست آمده از ۱ و ۲ و ۳ را با هم جمع می‌کنیم:

$$f(2) - f(1) = 4$$

$$f(3) - f(2) = 10 \xrightarrow{\text{جمع طرفین}} f(4) - f(1) = 28$$

$$f(4) - f(3) = 14$$

حالا آهنگ متوسط تغییر تابع $g(x) = x^2 + f(x)$ را در بازه $[1, 4]$ پیدا می‌کنیم:

$$\frac{g(4) - g(1)}{4-1} = \frac{(4^2 + f(4)) - (1^2 + f(1))}{3} = \frac{15 + f(4) - f(1)}{3} = \frac{15 + 28}{3} = \frac{43}{3}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۰

اتحاد مزدوج توی صورت کسر خیلی بدرد بخوره ...

سرنخ

پله اول:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(a) - f(a+h))(f(a) + f(a+h))}{h} \\ = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times (f(a) + f(a+h)) \\ = -f'(a) \times (f(a) + f(a)) = -2f'(a) \times f(a) \end{aligned}$$

پله دوم:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = \sqrt{x} \rightarrow f(a) = 3$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(a) = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$$

پله سوم:

$$-2f'(a)f(a) = -2\left(\frac{1}{6}\right)(3) = -1$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

ابتدا ضابطه وارون تابع $f(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} x > 1 \rightarrow x - 1 > 0 \rightarrow \sqrt{x-1} > 0 \rightarrow y > 0 \\ y = \sqrt{x-1} \rightarrow x = y^2 + 1 \rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 1, x > 0 \\ x \leq 1 \rightarrow 1 - x \geq 0 \rightarrow \sqrt{1-x} \geq 0 \rightarrow -\sqrt{1-x} \leq 0 \rightarrow y \leq 0 \\ y = -\sqrt{1-x} \rightarrow y^2 = 1 - x \rightarrow x = 1 - y^2 \rightarrow f^{-1}(x) = 1 - x^2, x \leq 0 \end{cases}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ; x > 0 \\ 1 - x^2 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

حال وضعیت تابع $f^{-1}(x)$ را در $x = 0$ تعیین می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - x^2) = 1$$

تابع $f^{-1}(x)$ در $x = 0$ پیوسته است، حال مشتق در $x = 0$ را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\rightarrow (f^{-1}(0))' = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - x^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0$$

بنابراین تابع $f^{-1}(x)$ در $x = 0$ مشتق‌پذیر است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

خط d_1 و d_2 به ترتیب در نقاط $x = 3$ و $x = 2$ بر $g(x)$ و $f(x)$ مماس هستند، پس:

$$f'(2) = m_{d_1}, g'(3) = m_{d_2}$$

حال برای به دست آوردن a از طرفین عبارت $(fog)(x) = x^2 - ax + 5$ مشتق می‌گیریم پس:

$$(fog)(x) = x^2 - ax + 5 \rightarrow g'(x) f'(g(x)) = 2x^2 - a$$

$$\xrightarrow{x=3} g'(3) \cdot \underbrace{f'(g(3))}_2 = 27 - a \rightarrow m_{d_2} \cdot m_{d_1} = 27 - a$$

$$\xrightarrow{\substack{m_{d_1} \cdot m_{d_2} = -1 \\ m_{d_1} \perp m_{d_2}}} -1 = 27 - a \rightarrow a = 28$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۳

پله اول: ابتدا درون قدرمطلق را تعیین علامت می کنیم.

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ یا } x = -2$$

$$\text{اگر } x \geq 5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 3x - 10 - 2x^2 \Rightarrow f(x) = -x^2 - 3x - 10$$

$$\Rightarrow f'(x) = -2x - 3 \Rightarrow -2x - 3 = +9 \Rightarrow -2x = 12 \Rightarrow x = -6$$

عدد به دست آمده بزرگتر از ۵ نیست پس قابل قبول نمی باشد.

پله دوم:

$$\text{اگر } -2 \leq x < 5 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 3x + 10 - 2x^2 \Rightarrow f(x) = -3x^2 + 3x + 10 \Rightarrow f'(x) = -6x + 3$$

$$\Rightarrow -6x + 3 = 9 \Rightarrow -6x = 6 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

پله سوم:

$$\text{اگر } x < -2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 3x - 10 - 2x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x - 3 = 9 \Rightarrow \boxed{x = -6}$$

پس مجموع جوابها می شود. $(-1) + (-6) = -7$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۴

$$y = f(x) = \frac{1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^6}{x^3} \rightarrow f(1) = 7$$

$$x^3 y = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^6 \xrightarrow{\text{مشتق}} 3x^2 y + x^3 y' = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + 6x^5$$

$$\xrightarrow{x=1} 3y + y' = 1 + 2 + 3 + \dots + 6 = 21 \rightarrow 3(7) + y' = 21 \rightarrow y' = f'(1) = 0$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

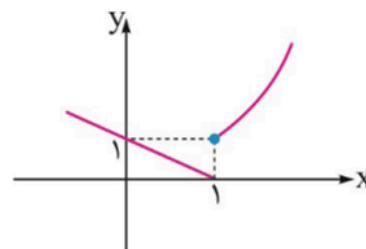
۴۵

با توجه به $f(x)$ و نمودار آن ضابطه $f \circ f$ را تشکیل می دهیم:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 1 & x \geq 1 \\ 1-x & x < 1 \end{cases}$$

$$f(f(x)) = \begin{cases} (f(x)-1)^2 + 1 & f(x) \geq 1 \\ 1-f(x) & f(x) < 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} x \geq 1, x \leq 0 \\ 0 < x < 1 \end{matrix}$$

$$f \circ f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ (x-1)^4 + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$



تابع $f \circ f$ در $x = 0$ ناپیوسته و در $x = 1$ مشتق چپ و راست نابرابر دارد پس این تابع در ۲ نقطه مشتق ناپذیر است و در گزینه ۴ تابع در $x = 0$ و $x = 4$ مشتق ناپذیر است. (نقاط گوشه)

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۶

اگر $a \neq 1$ تابع f در $x=1$ مشتق پذیر نیست و مشتق نامتناهی دارد. بنابراین معادله خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $(1, f(1))$ به صورت $x=1$ است.

اگر $a=1$ تابع f در $x=1$ مشتق پذیر است و

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x-1}{\sqrt[3]{x-1}+2} - 0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}+2} = \frac{1}{2}$$

بنابراین خط مماس در نقطه ای به طول ۱ روی نمودار تابع f به صورت زیر است:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$2y = x - 1$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۷

خط d بر هر دو تابع f و g در نقطه A مماس و در نتیجه $f'(x_A) = g'(x_A)$ است.

$$f(x) = x^2 + m \rightarrow f'(x) = 2x$$

$$g(x) = 4\sqrt{x} \rightarrow g'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} \quad f'(x) = g'(x) \rightarrow 2x = \frac{2}{\sqrt{x}} \rightarrow x\sqrt{x} = 1 \rightarrow x = 1 \rightarrow g(1) = 4$$

$$d: y = 2x + 2 \quad f'(1) = 2(1) = 2 \xrightarrow{A(1,4)} d$$

نقطه B محل تلاقی خط d و تابع h است، بنابراین:

$$y = 2x + 2$$

$$h(x) = \frac{4}{x} \xrightarrow[x < 0]{\text{تلاقی}} 2x + 2 = \frac{4}{x} \rightarrow 2x^2 + 2x = 4 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \times \\ x = -2 \checkmark \end{cases}$$

پس طول نقطه B برابر ۲- است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۸

$$y' = f' \left(\frac{f(2x)}{x} - 1 \right) \times \frac{2f'(2x)x - 1f(2x)}{x^2}$$

$$y'(1) = f' \left(\frac{f(2)}{1} - 1 \right) \times (2f'(2) - f(2)) \xrightarrow{f(2)=1} = f'(0) \times (2f'(2) - 1)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt[3]{(x-1)^2}} \Rightarrow f'(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, f'(2) = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow y'(1) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \times 2 - 1 \right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۹

ضابطه وارون $X + \sqrt{X^2 - 1}$ به صورت $\frac{1}{2} \left(X - \frac{1}{X} \right)$ است پس داریم:

$$\frac{f^{-1}(r) - f^{-1}(r-h)}{h} = \frac{\frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{2} \left(r-h - \frac{1}{r-h} \right)}{h} = \frac{1}{2h} \left(h - \frac{1}{r} + \frac{1}{r-h} \right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2h} \left(\frac{h-r+r}{r(r-h)} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{r(r-h)} = \frac{r}{\Delta}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1.0} = \frac{1}{2(r-h)} \Rightarrow r-h = 2/\Delta \Rightarrow h = -0.5/\Delta$$

$$f'(h) = f'(-0.5/\Delta) = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1}} = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$f(x) = \frac{(x+3)^2 - x(x-3) + 3 - 5x}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{x^2 + 6x + 9 - x^2 + 3x + 3 - 5x}{(x-3)(x+3)} = \frac{4x + 12}{(x-3)(x+3)} \xrightarrow{x \neq -3} \frac{4}{x-3}$$

اول ضابطه f را ساده کنیم:

۵۰

$$f'(x) = \frac{-4}{(x-3)^2} \quad \text{پس:}$$

حالا $\frac{4}{3-\sqrt{5}}$ به صورت $\frac{4(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$ گویا می شود و برابر $3+\sqrt{5}$ است.

$$f'(3+\sqrt{5}) = \frac{-4}{\Delta} = -0.8 \quad \text{پس جواب می شود:}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۱

اولاً حاصل حد برابر عدد حقیقی صفر شده و چون حد مخرج کسر برابر صفر است، پس حاصل حد صورت کسر نیز برابر صفر است:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f(1-h) - f(1+2h) = 0 \Rightarrow f(1^-) = f(1^+)$$

$$\Rightarrow a(1)(-1) + b(1^2)(1) = a(1)(-2) + b(1^2)(2)$$

$$\Rightarrow -a + b = -2a + 2b \Rightarrow \boxed{b = a}$$

ثانیاً از طریق قاعده هوییتال داریم:

$$-f'_-(1) - 2f'_+(1) = + \begin{cases} f'_-(1) = (-ax + bx^2)' = -a + 2bx \Big|_{x=1} = 2b - a \\ f'_+(1) = (-2ax + 2bx^2)' = -2a + 4bx \Big|_{x=1} = 4b - 2a \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'_-(1) = -2f'_+(1) \Rightarrow 2b - a = -4b + 4a \Rightarrow 1 \cdot b = \Delta a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 2b}$$

هم باید $a = b$ باشد و هم باید $a = 2b$ و این امکان ندارد، مگر آن که $a = b = 0$ باشد که مخالف فرض سؤال است.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$x^2(a + 3a + 6a) = 1 \cdot x^2 \rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$x^2(b + 2b + 2b) = 2 \cdot x^2 \rightarrow \boxed{b = 4}$$

$$c = 0 \quad d = 0$$

$$f(x) = x^3 + 4x^2$$

$$f(x) = 3x^2 + 8x$$

$$\left(f(3x^2 + 8x) \right)'_{x=-1} = (6x + 8)f'(-5) = 2 \times (75 - 40) = 70$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$d_1 : y = 2kx - 2k$$

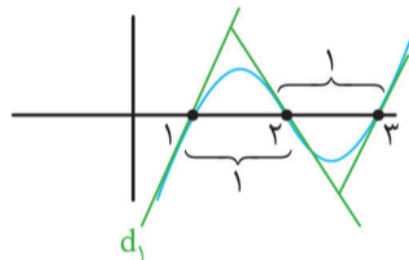
$$d_2 : y = -kx + 2k$$

$$2kx - 2k = -kx + 2k$$

$$2kx = 4k \rightarrow \boxed{x = \frac{4}{3}} \quad y = \frac{8k}{3} - 2k = \frac{2k}{3}$$

$$S = \frac{1 \times \frac{2k}{3}}{2} = \frac{k}{3} \quad \frac{k}{3} = 2 \quad \boxed{k = 6}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



۵۳

حد مخرج صفر است و حد وجود دارد پس حد صورت هم صفر بوده:

۵۴

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(f(x+2)) - f(1) = 0 \Rightarrow f(f(2)) = f(1)$$

$$\xrightarrow{f \text{ یک به یک است}} f(2) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 2$$

حالا داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x+2)) - f(1)}{x} = f'(1) + 2$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x+2)f'(f(x+2)) - 0}{1} = f'(1) + 2$$

اما f خطی است پس $f'(0) = f'(1) = f'(2) = \dots$ همواره برابر با مقدار ثابت m (شیب خط) است.

$$\Rightarrow m \times m = m + 2 \xrightarrow[m > 0]{f \text{ صعودی}} m = 2$$

و چون $f(2) = 1$ است، ضابطه f با شیب ۲ به صورت $f(x) = 2x - 3$ خواهد بود و در نتیجه $f(4) = 5$.

f و g در نقطه به طول ۵ بر هم مماس اند پس $f'(5) = g'(5) = 2$ و داریم:

$$f(0) + g'(5) = -3 + 2 = -1$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{16 - x^n}}$$

چون f از مبدأ گذشته، $f(0) = 0$ است پس $a = 16$ و مثل سؤال قبل داریم:

۵۵

دوباره مزدوج:

$$f(x) = \sqrt{\frac{(4 - \sqrt{16 - x^n})(4 + \sqrt{16 - x^n})}{4 + \sqrt{16 - x^n}}}$$

$$= \sqrt{\frac{x^n}{4 + \sqrt{16 - x^n}}} = \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{4 + \sqrt{16 - x^n}}}$$

برای وجود مشتق در $x = 0$ باید اولاً n زوج باشد وگرنه اصلاً 0^- را نداریم و تابع در $x = 0$ مشتق پذیر نمی شود. ضمناً برای این که مشتق صفر بشود باید

$\frac{n}{2} > 1$ باشد تا وقتی از $x^{\frac{n}{2}}$ مشتق می گیریم جواب صفر به دست بیاید. پس $n > 2$ و $a = 16$ بنابراین $a + n$ می تواند 20 باشد.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

راه اول: برای رسیدن به $f'(0)$ باید عبارتی به شکل $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ بسازیم. اول $x = y = 0$ قرار می‌دهیم:

$$f(0) = f(0) + f(0) + 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f(x+y) - f(x) = f(y) + 3xy(x+y)$$

حالا دقت کنید که:

$$\xrightarrow{\div y} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \frac{f(y)}{y} + 3x(x+y)$$

اگر از این عبارت حد بگیریم و y را به سمت صفر میل دهیم:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y} + 3x(x+y) \Rightarrow \underbrace{f'(x)}_{\text{هوپی‌تال از تعریف مشتق}} = \underbrace{f'(0)}_{\text{هوپی‌تال از تعریف مشتق}} + 3x^2$$

پس $f'(0) = 0$ و در نتیجه $f'(0) = f'(0) + 0$.

و بنابراین $f'(5) = 0 + 3 \times 5^2 = 75$ و جمع آنها می‌شود ۷۵.

راه دوم: $3xy(x+y)$ آشنا است. $3x^2y + 3y^2x$ را توی اتحاد $(x+y)^2$ دیدیم. حالا بگویید چرا $f(x) = x^3$ درست است؟

$$(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$$

پس داریم: $f'(x) = 3x^2$ و تمام.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$A\left(a, \frac{3}{a}\right) \quad m = f'(a) = -\frac{3}{a^2}$$

$$y - \frac{3}{a} = -\frac{3}{a^2}(x - a) \quad \text{معادله مماس}$$

$$\text{محل تلاقی با محورها} \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = \frac{6}{a} \\ y = 0 \rightarrow x = 3a \end{cases} \Rightarrow$$

$$P = 2\left(a + \frac{3}{a} + \sqrt{a^2 + \frac{9}{a^2}}\right) \Rightarrow P' = 2\left(1 - \frac{3}{a^2} + \frac{a - \frac{9}{a}}{\sqrt{a^2 + \frac{9}{a^2}}}\right)$$

$$a = 3 \rightarrow P' = 2\left(1 - \frac{3}{9} + \frac{3 - \frac{9}{3}}{\sqrt{9 + \frac{9}{9}}}\right) = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5}\right) = 1/2$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۸

راه اول: برای رسیدن به $f'(\circ)$ باید عبارتی به شکل $\frac{f(x) - f(\circ)}{x}$ بسازیم. اول $x = y = \circ$ قرار می‌دهیم:

$$f(\circ) = f(\circ) + f(\circ) + \circ \Rightarrow f(\circ) = \circ$$

$$f(x+y) - f(x) = f(y) + 3xy(x+y)$$

حالا دقت کنید که:

$$\xrightarrow{\div y} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \frac{f(y)}{y} + 3x(x+y)$$

اگر از این عبارت حد بگیریم و y را به سمت صفر میل دهیم:

$$\lim_{y \rightarrow \circ} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \lim_{y \rightarrow \circ} \frac{f(y)}{y} + 3x(x+y) \Rightarrow \underbrace{f'(x)}_{\text{هوپی탈 از تعریف مشتق}} = \underbrace{f'(\circ)}_{\text{هوپی탈 از تعریف مشتق}} + 3x^2 \Rightarrow f'(x) - f'(\circ) = 3x^2$$

$$\Rightarrow f'(\Delta) - f'(\circ) = 3\Delta^2$$

راه دوم: $3xy(x+y)$ آشنا است. $3x^2y + 3y^2x$ را توی اتحاد $(x+y)^3$ دیدیم، حالا بگویید چرا $f(x) = x^3$ درست است؟

$$(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$$

پس داریم: $f'(x) = 3x^2$ و تمام.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$y = 3 + 4\sqrt{x+3} \Rightarrow y-3 = 4\sqrt{x+3}$$

اول ضابطه f^{-1} را پیدا می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} (y-3)^2 = 16(x+3) \xrightarrow[\text{تنها کنیم}]{\text{را } x} x = \frac{(y-3)^2}{16} - 3 \xrightarrow[\text{وارون}]{\text{ضابطه}} f^{-1}(x) = \frac{(x-3)^2}{16} - 3, x \geq 3$$

$$(f^{-1} \circ f')'_{(1)} = f''(1) \times (f^{-1})'(f'(1))$$

حالا از $f^{-1} \circ f'$ مشتق می‌گیریم:

به مشتق اول و دوم f نیاز داریم:

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+3}} = 2(x+3)^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{مشتق}} f''(x) = -(x+3)^{-\frac{3}{2}} \xrightarrow{x=1} \begin{cases} f''(1) = -\frac{1}{8} \\ f'(1) = 1 \end{cases}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{x-3}{8} \rightarrow (f^{-1})'(f'(1)) = -\frac{1}{4}$$

مشتق ضابطه وارون f هم برابر است با:

پس جواب می‌شود:

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{8}\right) \times \left(-\frac{1}{4}\right) = 2^{-5}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۹

گام اول: طبق ضابطه تابع f ، این تابع در ریشه ساده عبارت زیر رادیکال با فرجه ۳ مماس قائم دارد؛ پس معادله مماس قائم این تابع خط $x = -2$ است.

فرجه فرد

$$f(x) = |x - 6| \sqrt[3]{x + 2}$$

معادله خط مماس قائم $x = -2$: ریشه ساده

گام دوم: همچنین طبق ضابطه f ، ریشه ساده داخل قدرمطلق یعنی $x = 6$ طول نقطه گوشه‌ای تابع است. عرض این نقطه طبق ضابطه برابر با صفر است.

$$f(x) = |x - 6| \sqrt[3]{x + 2}$$

طول نقطه گوشه‌ای $x = 6$: ریشه ساده

گام سوم: می‌خواهیم معادله نیم‌مماس‌های راست و چپ تابع را در نقطه گوشه‌ای یعنی $A(6, 0)$ بنویسیم؛ پس باید شیب آن‌ها را حساب کنیم که به ترتیب برابر با مشتق راست و چپ تابع f در این نقطه هستند. از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم.

$$f'_+(6) = \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{\overbrace{|x - 6|}^{\oplus} \sqrt[3]{x + 2} - 0}{x - 6} \xrightarrow[\text{قدرمطلق مثبت است.}]{\text{وقتی } x \rightarrow 6^+, \text{ داخل}} f'_+(6) = \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{(x - 6) \sqrt[3]{x + 2}}{x - 6} = \sqrt[3]{6 + 2} = 2$$

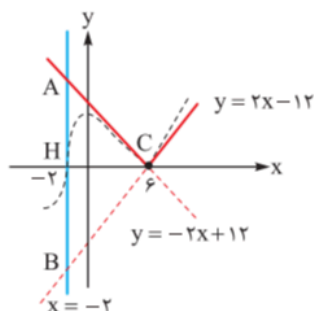
$$f'_-(6) = \lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = \lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{\overbrace{|x - 6|}^{\ominus} \sqrt[3]{x + 2}}{x - 6} \xrightarrow[\text{قدرمطلق منفی است.}]{\text{وقتی } x \rightarrow 6^-, \text{ داخل}} f'_-(6) = \lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{-(x - 6) \sqrt[3]{x + 2}}{x - 6} = -\sqrt[3]{6 + 2} = -2$$

پس:

معادله نیم‌مماس راست: $y - 0 = 2(x - 6) \Rightarrow y = 2x - 12$

معادله نیم‌مماس چپ: $y - 0 = -2(x - 6) \Rightarrow y = -2x + 12$

گام چهارم: با مشخص شدن معادله نیم‌مماس‌ها در نقطه گوشه‌ای، شکل فرضی زیر را رسم می‌کنیم. خواسته سؤال محاسبه مساحت مثلث ABC است. در این مرحله نیاز به عرض نقاط A و B داریم:



$$\left. \begin{array}{l} y = 2x - 12 \xrightarrow{x = -2} y_B = -16 \\ y = -2x + 12 \xrightarrow{x = -2} y_A = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow AB = 32$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times CH = \frac{1}{2} \times 32 \times 8 = 128$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: تابع $\text{fog} - \text{gof}$ را تشکیل می‌دهیم و با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم آن را ساده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} g(f(x)) - f(g(x)) &= \log_2 f(x) - 2^{g(x)-1} = \log_2 2^{(2x-1)} - 2^{\log_2 x - 1} = (2x-1) \log_2 2 - 2^{\log_2 x - 1} \times (2^{-1}) \\ &= 2x - 1 - \frac{1}{2} \times 2^{\log_2 x} = 2x - 1 - \frac{x}{2} \Rightarrow (\text{fog} - \text{gof})(x) = 2x - 1 - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

گام دوم: مشتق تابع را حساب کرده و سپس مقدار آن را در $x = 5$ به دست می‌آوریم.

$$(\text{fog} - \text{gof})'(x) = 2 - \frac{1}{2} \xrightarrow{x=5} (\text{fog} - \text{gof})'(5) = \frac{3}{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: حد خواسته شده شباهت‌هایی با تعریف مشتق در $x = 1$ دارد. در صورت کسر $f(1)$ را اضافه و کم می‌کنیم و کسر را تفکیک

می‌کنیم تا به تعریف مشتق برسیم.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{f(1+h) - f(1)}{h}}_{f'(1)} + \lim_{h \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{f(1-h) - f(1)}{-h}}_{\text{تغییر متغیر: } t=-h, t \rightarrow 0^-} \\ &= f'_+(1) + \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} = f'_+(1) + f'_-(1) (*) \end{aligned}$$

گام دوم: از ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot g(x)$ مشتق گرفته و در آن x را برابر با یک قرار می‌دهیم تا $f'(1)$ به دست آید.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)' g(x) + \sqrt[3]{x} \times g'(x) \Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} \times g(1) + \sqrt[3]{1} \times g'_+(1) \\ f'_-(1) = \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} \times g(1) + \sqrt[3]{1} \times g'_-(1) \end{cases}$$

طبق نمودار تابع g ، $g(1) = 1$ ، $g'_+(1) = \frac{0-1}{3-1} = -\frac{1}{2}$ و $g'_-(1) = \frac{1-0}{1-0} = 1$ است؛ پس:

$$f'_+(1) = \frac{1}{3} \times 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6}$$

$$f'_-(1) = \frac{1}{3} \times 1 + 1 = \frac{4}{3}$$

$$f'_+(1) + f'_-(1) = \frac{4}{3} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

گام سوم: با جای‌گذاری مقادیر در (*) داریم:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: معادله خط ℓ را که در نقطه $(1, 2)$ بر تابع f مماس شده است، می‌نویسیم و شیب آن را m در نظر می‌گیریم.

$$y - 2 = m(x - 1)$$

گام دوم: برای محاسبه مساحت مثلث به طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط ℓ احتیاج داریم.

$$y = 0 \Rightarrow 0 - 2 = m(x - 1) \Rightarrow x = \frac{m - 2}{m}$$

$$x = 0 \Rightarrow y - 2 = m(0 - 1) \Rightarrow y = 2 - m$$

گام سوم: مساحت مثلث را برابر با ۴ قرار می‌دهیم.

$$\frac{1}{2} \times (\text{طول از مبدأ}) \times (\text{عرض از مبدأ}) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{m - 2}{m}\right) \times (2 - m) = 4 \Rightarrow 4 - 4m + m^2 = -8m \Rightarrow m^2 + 4m + 4 = 0 \Rightarrow (m + 2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow m = -2$$

گام چهارم: از طرفی می‌دانیم شیب خط مماس در $x = 1$ برابر با مشتق تابع f در این نقطه است، یعنی:

$$f'(1) = -2$$

راه اول:

گام پنجم: حد خواسته شده را با استفاده از تجزیه و اتحاد مزدوج ساده می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f^2(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x) - f(1))(f(x) + f(1))}{(x - 1)(x + 1)} = f'(1) \times \frac{2f(1)}{2} = f'(1) \times f(1) = -2 \times 2 = -4$$

$f'(1)$

راه دوم:

گام پنجم: با استفاده از قاعده هوییتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f^2(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f'(x)f(x)}{2x} = f'(1) \times f(1) = -2 \times 2 = -4$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: ضابطه تابع خطی g را می نویسیم و از آن مشتق می گیریم.

$$y - 0 = \frac{2-0}{0-1}(x-1) \Rightarrow g(x) = -2x + 2, g'(x) = -2$$

گام دوم: ضابطه تابع درجه دوم f را می نویسیم و از آن مشتق می گیریم. تابع f محور x ها را در دو نقطه به طول های $x = -1$ و $x = 2$ قطع می کند؛ پس:

$$f(x) = a(x+1)(x-2) \xrightarrow{f(0)=-1} a(0+1)(0-2) = -1 \Rightarrow -2a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x - 2), f'(x) = x - \frac{1}{2}$$

گام سوم: از تابع $y = g \circ f - \frac{f}{g}$ مشتق می گیریم:

$$y = g(f(x)) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

$$y' = f'(x)g'(f(x)) - \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

گام چهارم: مقدار مشتق را در $x = 0$ به دست می آوریم:

$$y'(0) = f'(0)g'(f(0)) - \frac{f'(0)g(0) - g'(0)f(0)}{g^2(0)} \quad (1)$$

گام پنجم: مقادیر $f(0)$, $g(0)$, $f'(0)$, $g'(0)$ و $g'(f(0))$ را باید حساب کنیم و در (۱) جای گذاری کنیم.

$$f(0) = \frac{1}{2}(0-0-2) = -1, g(0) = -2(0) + 2 = 2, f'(0) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}, g'(0) = g'(f(0)) = -2$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در (۱)}} y'(0) = \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-2) - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(2) - (-2)(-1)}{2^2} = 1 - \frac{-1-2}{4} = 1 + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

پاسخ تشریحی گام اول: برای آن که تابع f در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد، در مرحله اول باید در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، پس در $x=1$ نیز پیوسته است.

حد چپ و راست تابع را در $x=1$ برابر قرار می دهیم.

$$1 + \sqrt{1+a} = 1^2 + b(1) + 2 \Rightarrow \sqrt{1+a} = b+2 \quad (1)$$

گام دوم: تابع باید در $x=1$ مشتق پذیر باشد، پس مشتق چپ و راست تابع در این نقطه برابرند.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2\sqrt{x+a}} & x \geq 1 \\ 2x+b & x < 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow 1 + \frac{1}{2\sqrt{1+a}} = 2+b \quad (2)$$

گام سوم: از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم:

$$\sqrt{1+a} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{1+a}} \xrightarrow[t>0]{\text{تغییر متغیر: } t=\sqrt{1+a}} t = 1 + \frac{1}{2t}$$

$$\xrightarrow{\times t} t^2 = t + \frac{1}{2} \Rightarrow 2t^2 - 2t - 1 = 0 \xrightarrow{t>0} t = \frac{2+\sqrt{4+8}}{4} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+a} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 1+a = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow 1+a = \frac{1+3+2\sqrt{3}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\xrightarrow{(1)} b = \sqrt{1+a} - 2 = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} - 2 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} - 2 = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}} - 2 = \frac{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2 + 2(1)(\sqrt{3})}}{2} - 2$$

$$= \frac{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}}{2} - 2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} - 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}$$

گام چهارم: حاصل $[b-a]$ را حساب می کنیم.

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \left[-\frac{3}{2}\right] = -\frac{3}{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

پاسخ تشریحی گام اول: نقطه تماس خط مماس رسم شده از نقطه A با تابع f را به صورت $T(\alpha, f(\alpha))$ در نظر می گیریم. در این صورت:

$$T\left(\alpha, \frac{(\alpha+1)^2}{\alpha+3}\right) \text{ است.}$$

گام دوم: شیب خط AT را محاسبه می کنیم. این شیب با مشتق تابع f در نقطه T برابر است:

$$m_{AT} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha+3} - 0}{\alpha + \frac{1}{3}} = \frac{3(\alpha+1)^2}{(\alpha+3)(3\alpha+1)}$$

$$f'(x) = \frac{2(x+1)(x+3) - (x+1)^2 \times 1}{(x+3)^2} = \frac{(x+1)(2x+6-x-1)}{(x+3)^2} = \frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)^2}$$

$$\Rightarrow m_{AT} = f'(\alpha) \Rightarrow \frac{3(\alpha+1)^2}{(\alpha+3)(3\alpha+1)} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+5)}{(\alpha+3)^2} \xrightarrow{\alpha \neq -3} \alpha = -1$$

یک جواب است.

$$\frac{3(\alpha+1)}{3\alpha+1} = \frac{\alpha+5}{\alpha+3} \Rightarrow 3(\alpha^2 + 4\alpha + 3) = 3\alpha^2 + 15\alpha + \alpha + 5 \Rightarrow$$

$$3\alpha^2 + 12\alpha + 9 = 3\alpha^2 + 16\alpha + 5 \Rightarrow 4\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 1$$

پس نقاط تماس $(1, 1)$ و $(-1, 0)$ هستند.

گام چهارم: معادله خط گذرنده از این دو نقطه، $2y - mx = n$ است. با جای گذاری داریم:

$$\begin{aligned} (1, 1) &\Rightarrow 2 - m = n \\ (-1, 0) &\Rightarrow m = n \end{aligned} \Rightarrow n = 1 = m \Rightarrow m^2 + n^2 = 2$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$y = \text{fog}(x) \Rightarrow y' = g'(x) \times f'(g(x))$$

$$1) g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \xrightarrow{x=\frac{1}{9}} g'\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{9}} = -\frac{27}{2}$$

$$2) g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{9})^-} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(\frac{1}{9})^-} = 3^+$$

$$3) f(x) = \frac{x^2-9}{|2-x|} [-x] \xrightarrow{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2-9}{x-2} (-4)$$

$$g'\left(\frac{1}{9}\right) \times f'_+(3) = \left(-\frac{27}{2}\right) \times \frac{6}{1} (-4) = 324$$

بنابراین f در $x = 3$ عامل صفرشونده $x^2 - 9$ دارد:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

مشتق تابع fog اینگونه است:

به ازای $x \rightarrow (\frac{1}{9})^-$ داریم:

۶۸

عبارت $g'(-3) \times f'(g(-3))$ مشتق $f(g(x))$ را در $x = -3$ می‌خواهد.ابتدا ضابطه هر دو تابع را بدون قدرمطلق می‌نویسیم (ضابطه g را برای $x = -3$ و ضابطه f را برای $g(-3)$ ساده می‌کنیم):

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x|x|}} \xrightarrow{x=-3 < 0, |x|=-x} g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x|x|}} \xrightarrow{g(-3) < 0, |x|=-x} f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

حالا ضابطه fog را به دست می‌آوریم:

$$f(g(x)) = \frac{g(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x$$

$$f(g(x)) = x \Rightarrow (f(g(x)))' = 1$$

بنابراین:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۹

اینکه در $x=2$ مشتق راست و چپ وجود دارند ولی با هم مساوی نیستند (۵۶ واحد اختلاف دارند) نتیجه می‌دهد که $x=2$ طول نقطه گوشه‌ای تابع f است. بنابراین ریشه ساده داخل قدرمطلق است.

$$mx^2 + n = 0 \xrightarrow{x=2} fm + n = 0 \Rightarrow n = -fm \quad (*)$$

$$f(x) = |m| \left| x^2 - 4 \right| \quad \text{پس ضابطه تابع به شکل } f(x) = |mx^2 - 4m| \left[x^2 \right] \text{ است که می‌توان } m \text{ را فاکتور گرفت:}$$

به ازای $x \rightarrow 2^{\pm}$ ضابطه را ساده می‌کنیم و مشتق می‌گیریم:

$$x \rightarrow 2^+ : f(x) = |m|(x^2 - 4) \Rightarrow f'(x) = 4|m|(2x) \xrightarrow{x=2} f'_+(2) = 4|m|(4) = 16|m|$$

$$x \rightarrow 2^- : f(x) = |m|(-x^2 + 4) \Rightarrow f'(x) = 3|m|(-2x) \xrightarrow{x=2} f'_-(2) = 3|m|(-4) = -12|m|$$

اختلاف مشتق راست و چپ ۵۶ واحد است، پس:

$$16|m| - (-12|m|) = 56 \Rightarrow 28|m| = 56 \Rightarrow |m| = 2 \Rightarrow \begin{cases} m=2 \xrightarrow{(*)} n=-8 \Rightarrow m+n=-6 \\ m=-2 \xrightarrow{(*)} n=8 \Rightarrow m+n=6 \end{cases}$$

پس حداکثر مقدار $m+n$ برابر با ۶ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷۰

عرض از مبدأ خط برابر ۳ است. بنابراین خط و منحنی در $(0, 3)$ بر یکدیگر مماس هستند.

$$f(0) = 3 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow f(x) = 2x^2 + ax + 3$$

مشتق تابع در $x=0$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + ax + 3 - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x + a)}{x} = a$$

شیب خط مماس بر منحنی در $x=0$ همان $f'(0)$ است. در نتیجه:

$$-\frac{a^2}{4} = a \Rightarrow a^2 + 4a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \Rightarrow \text{خط مماس بر تابع افقی می‌شود} \Rightarrow \text{غیق} \\ a=-4 \checkmark \end{cases}$$

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 3 \quad \text{خواهیم داشت:}$$

$$f(a+b) = f(-1) = 9$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$y' = \frac{-g'(1-x)f(x) - f'(x)g(1-x)}{f^2(x)} \rightarrow y'_{(-3)} = \frac{-g'(4)f(-3) - f'(-3)g(4)}{f^2(-3)}$$

۷۱

با توجه به شکل و عمود بودن دو خط d_1 و d_2 شیب خط d_1 برابر $\frac{3}{4}$ و شیب خط d_2 برابر $-\frac{4}{3}$ است پس:

$$\begin{cases} f'(-3) = \frac{3}{4} \\ g'(4) = -\frac{4}{3} \end{cases} \rightarrow y'(-3) = \frac{-\left(-\frac{4}{3}\right)(-3) - \left(\frac{3}{4}\right)(4)}{(-3)^2} = \frac{-4-3}{9} = \frac{-7}{9}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

اگر توابع f و g را با هم جمع کنیم خواهیم داشت:

۷۲

$$f(x) + g(x) = \underbrace{\log(x^2 + 5 - x^2)}_{\log 5}$$

حال از طرفین مشتق خواهیم گرفت:

($\log 5$ عدد ثابت است و مشتق عدد ثابت برابر صفر است)

$$f'(x) + g'(x) = 0$$

$$f'(x) = -g'(x) \Rightarrow \begin{cases} f'(2) = -g'(2) \\ f'(5) = -g'(5) \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\frac{f'(2)}{g'(2)} - \frac{g'(5)}{f'(5)}} = \sqrt{-1 - (-1)} = \sqrt{0} = 0$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$f^2(2x-1) = \sqrt{2x+2\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$$

۷۳

از طرفین مشتق می‌گیریم:

$$2f(2x-1)f'(2x-1) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$\xrightarrow{x=3} 4f(5)f'(5) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{4} \quad *$$

برای محاسبه $f(5)$ کافی است در فرض مسأله $x=3$ را جایگزین کنیم.

$$\xrightarrow{x=3} f^2(5) = 2 + \sqrt{2} \xrightarrow[\text{مثبت}]{f(x) \text{ همواره}} f(5) = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$\xrightarrow{*} 4\left(\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)f'(5) = \frac{\sqrt{2} + 1}{4} \Rightarrow 16f'(5) = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt[4]{2}\sqrt{\sqrt{2} + 1}} =$$

$$\Rightarrow 16f'(5) = \frac{\sqrt{\sqrt{2} + 1}}{\sqrt[4]{2}}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۷۴

با توجه به نقاط $A(2-h, f(2-h))$ و $B(2+h, f(2+h))$ و تعریف شیب خط داریم:

$$m_{AB} = \frac{f(2+h) - f(2-h)}{2+h - 2-h} = \frac{f(2+h) - f(2-h)}{2h}$$

شیب پاره خط AB وقتی $h \rightarrow 0$ برابر است با:

$$\lim_{h \rightarrow 0} m_{AB} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{2h} = \frac{2 - (-1)}{2} \times f'(2) = f'(2)$$

نکته: اگر f در $x = a$ مشتق پذیر باشد:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+mh) - f(a+nh)}{kh} = \left(\frac{m-n}{k}\right)f'(a)$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷۵

نقطه مماس خط و تابع f ، هم عضو خط و هم عضو تابع f می باشد بنابراین داریم:

$$y(3) = f(3) \xrightarrow{y=3x-5} f(3) = 3 \times 3 - 5 = 4$$

و همچنین با توجه به مفهوم خط مماس و ارتباط آن با مشتق داریم:

$$f'(3) = \text{شیب خط} = 3$$

حاصل حد مبهم است، برای رفع ابهام از اتحاد مزدوج استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{f(x)} - 3}{x^2 - 2x - 3} \times \frac{\sqrt{f(x)} + 3}{\sqrt{f(x)} + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 9}{(x-3)(x+1) \times 4} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 9}{x-3} \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+1} \times \frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{3+1} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

$f'(3) = 3$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷۶

تابع $y = [x]$ در $x=1$ از چپ ناپیوسته است. از آنجایی که تابع در $x=1$ مشتق چپ دارد پس مقدار $ax+2$ در $x=1$ برابر صفر است.

$$a(1)+2=0 \rightarrow a=-2$$

اکنون مقدار مشتق چپ در $x=1$ را برابر $-\frac{1}{2}$ قرار می دهیم.

$$f'_-(1) = \left(\frac{-2x+2}{bx+0}\right)' = \frac{-2b}{b^2 x^2} \xrightarrow{x=1} \frac{-2b}{b^2} = \frac{-2}{b} = -\frac{1}{2} \Rightarrow b=4$$

با مشخص شدن ضابطه تابع $f(x)$ ، برای $f'_+(1)$ خواهیم داشت:

$$f'_+(1) = \left(\frac{-2x+2}{4x+1}\right)' = \frac{-2 \times 4}{(4x+1)^2} = \frac{-1 \cdot 0}{(4x+1)^2} \xrightarrow{x=1} \frac{-1 \cdot 0}{25} = -\frac{2}{5}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷۷

نقطه M روی منحنی $y = \sqrt[3]{x^2}$ را به صورت $M(x, \sqrt[3]{x^2})$ در نظر می گیریم فاصله نقطه M از خط $y = x+1$ برابر است با:

$$g = \frac{|\sqrt[3]{x^2} - x - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|\sqrt[3]{x^2} - x - 1|}{\sqrt{2}}$$

عبارت $\sqrt[3]{x^2} - x - 1$ حوالی $x=8$ منفی است.

پس تابع g را به صورت $g = \frac{1+x-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{2}}$ می نویسیم:

$$g' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}\right) \quad g' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2}{3 \sqrt[3]{x}}\right) \rightarrow g'(8) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2}{3 \sqrt[3]{8}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷۸

$$\frac{\Delta(\text{مساحت})}{\Delta(\text{محیط})} = \Delta \rightarrow \frac{\pi r^2 - \pi r_0^2}{2\pi r - 2\pi r_0} = \Delta \Rightarrow \frac{\pi(r-r_0)(r+r_0)}{2\pi(r-r_0)} = \Delta \quad \frac{r+r_0}{2} = \Delta \rightarrow \frac{r+r_0}{2} = \Delta \rightarrow r_0 = r \quad S = \pi r^2 \rightarrow S' = 2\pi r \xrightarrow{r_0=r} S'(r) = 2\pi$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷۹

ضابطه تابع f را محاسبه می‌کنیم:

$$f^{-1}(\sqrt[3]{x}+1)=x^3+x \rightarrow \sqrt[3]{x}+1=f(x^3+x)$$

از تابع بالا مشتق می‌گیریم:

$$(3x^2+1)f'(x^3+x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

حال $x=1$ را جای‌گذاری می‌کنیم.

$$(3+1)f'(2)=\frac{1}{3} \rightarrow f'(2)=\frac{1}{12}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)$ در $x=2$ برابر $\frac{1}{12}$ است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۰

چون داریم $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = (fog)^{-1}(x)$ لذا داریم:

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(20) = 11 \Rightarrow (fog)(11) = 20$$

از طرف دیگر با ساده کردن تابع $f(x)$ داریم:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x-1)}{(x-2)} \rightarrow f(x) = x^2+2x-1, x \neq 2$$

حال تابع g یک تابع خطی دوم غیر ثابت و $f(x)$ یک تابع درجه دوم است لذا fog نیز از درجه دوم است و چون $\frac{11+5}{2} = 8$ پس $x=8$ نقطه وسط بازه $[5, 11]$ است و با توجه به اینکه می‌دانیم آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع درجه دوم در وسط یک بازه برابر با آهنگ متوسط تغییر در آن بازه است. لذا:

$$(fog)'(8) = \frac{(fog)(11) - (fog)(5)}{11 - 5} = \frac{20 - 8}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۱

تابع $f(x)$ در $x=2$ باید پیوسته باشد؛ در ضابطه تابع بالایی، چون مخرج کسر در $x=2$ صفر است، پس صورت کسر هم باید به ازای $x=2$ صفر باشد، بنابراین $fa + b = 0$ و در نتیجه $b = -fa$ است.

$$f(x) = \frac{ax^2 - fa}{x-2} = \frac{a(x^2 - f)}{x-2} = \frac{a(x-2)(x+2)}{x-2} = a(x+2) = ax + 2a$$

ثانیاً مشتق در $x=2$ باید برابر ۳ باشد:

$$ax + 2a \xrightarrow{\text{مشتق}} a = 3 \text{ و } b = -12 \rightarrow f(x) = \frac{ax^2 - fa}{x-2} = \frac{3x^2 - 12}{x-2} = 3(x+2) = 3x + 6$$

برای اینکه تابع f پیوسته باشد، $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = c$ است:

$$\Rightarrow c = 12$$

$$\rightarrow a - b + c = 3 - (-12) + 12 = 3 + 12 + 12 = 27$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۲

ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{(x^2-1) + (x^2-2)}{(x^2-1)(x^2-2)} = \frac{x^2-1}{(x^2-1)(x^2-2)} + \frac{x^2-2}{(x^2-1)(x^2-2)} = \frac{1}{x^2-2} + \frac{1}{x^2-1}$$

اکنون از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-2)^2} + \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

برای یافتن مقدار مشتق دوم تابع در $x=0$ کافی است فقط از عامل صفرکننده مشتق بگیریم.

$$f''(0) = \frac{-2}{(0^2-2)^2} + \frac{-2}{(0^2-1)^2} \Rightarrow f''(0) = \frac{-2}{4} + \frac{-2}{1} = -\frac{5}{2}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۳

با توجه به اینکه $x=1$ نقطه گوشه‌ای تابع f می‌باشد پس تابع در $x=1$ پیوسته است و لی مشتق چپ و راست نابرابر دارد پس باید عبارت $2x^3 + 2ax^2 + bx + 2c$ بر $x-1$ بخش پذیر باشد همچنین با توجه به اینکه تابع در $x=-2$ مشتق پذیر است باید عبارت $2x^3 + 2ax^2 + bx + 2c$ بر $(x+2)^2$ بخش پذیر باشد (چرا؟)

$$2x^3 + 2ax^2 + bx + 2c = 2(x-1)(x+2)^2 = (2x-2)(x^2+4x+4) = 2x^3 + 6x^2 - 8$$

$$\begin{cases} 2a=6 \Rightarrow a=3 \\ b=0 \\ 2c=-8 \Rightarrow c=-4 \end{cases} \quad a-b-c=3-0+4=7$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۴

با توجه به اطلاعات داده شده تابع $f(x)$ یک تابع با تناوب $T=6$ است و نیز چون برای هر x دامنه $f(|x|)=f(x)$ ، پس محور y محور تقارن تابع است. حال داریم:

$$g(2x+1) = f\left(\frac{2x-6}{x-1}\right) \Rightarrow 2g'(2x+1) = \frac{4}{(x-1)^2} f'\left(\frac{2x-6}{x-1}\right) \xrightarrow{x=2} 2g'(\Delta) = 4f'(-2) \quad (1)$$

چون تابع f نسبت به محور y متقارن است پس داریم:

$$f(-x) = f(x) \Rightarrow -f'(-x) = f'(x) \quad (2)$$

$$g'(\Delta) = -2f'(2)$$

پس با توجه به (۱) و (۲) داریم:

و چون تابع متناوب با دوره تناوب $T=6$ است پس f' نیز متناوب بوده و $T=6$ دوره تناوب $f'(x)$ نیز می‌باشد پس:

$$g'(\Delta) = -2f'(2) = -2f'(8) = (-2)(-10) = 20$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۵

گام اول: خط از نقاط $(3, 2)$ و $(0, 4)$ می‌گذرد، پس شیب آن برابر می‌شود با $\frac{4-2}{0-3} = \frac{-2}{3}$. خط در $x=3$ بر منحنی f مماس است، پس:

$$f(3) = 2$$

$$f'(3) = \frac{-2}{3}$$

گام دوم: مخرج حد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-ah) + a}{h}$ برابر صفر می‌شود و چون حاصل حد b شده است، پس صورت آن نیز باید وقتی $h \rightarrow 0$ ، برابر صفر شود.

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(3-ah) + a = 0 \Rightarrow f(3) = -a \xrightarrow[\text{ازگام اول}]{f(3)=2} 2 = -a \Rightarrow a = -2$$

گام سوم: $a = -2$ را در حد جای گذاری می‌کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-ah) + a}{h} = b \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h) - f(3)}{h} = b \Rightarrow 2f'(3) = b \xrightarrow[\text{ازگام اول}]{f'(3)=\frac{-2}{3}} b = 2\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{-4}{3}$$

پس خواسته سؤال برابر می‌شود با $\frac{-4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{-2}{3}$.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: چون خط $y = 2x - 3$ در $x = 1$ بر f مماس است، پس $f(1) = 2(1) - 3 = -1$. در نتیجه مقدار حد خواسته شده $\frac{0}{0}$ می شود، با توجه به اتحاد چاق و لاغر آن را رفع ابهام می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sqrt[3]{f(x)}}{\underbrace{x^2 + 2x - 3}_{(x-1)(x+3)}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sqrt[3]{f(x)}}{(x-1)(x+3)} \times \underbrace{\frac{1 - \sqrt[3]{f(x)} + (\sqrt[3]{f(x)})^2}{1 - \sqrt[3]{f(x)} + (\sqrt[3]{f(x)})^2}}_3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + f(x)}{\underbrace{(x-1)(x+3)(3)}_4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 1}{12(x-1)} = \frac{1}{12} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 1}{x-1}$$

گام دوم: با توجه به این که $f(1) = -1$ ، حد به دست آمده برابر می شود با:

$$\frac{1}{12} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 1}{x-1} = \frac{1}{12} \underbrace{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}}_{\text{می دانیم که همان } f'(1) \text{ است.}} = \frac{1}{12} f'(1)$$

گام سوم: خط $y = 2x - 3$ بر f در $x = 1$ مماس است، پس $f'(1)$ برابر می شود با مشتق تابع خطی که همان شیب خط یعنی ۲ است، یعنی $f'(1) = 2$ ؛ در نتیجه خواسته سؤال مساوی است با:

$$\frac{1}{12} f'(1) = \frac{1}{12} (2) = \frac{1}{6}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: ابتدا تعریف مشتق تابع f در $x = 2$ را می نویسیم:

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

گام دوم: حالا کافی است از رابطه مفروض صورت سؤال استفاده کنیم:

$$\underbrace{f(\underbrace{2+h}_x)}_{y} - \underbrace{f(2)}_x = h^2 + 3h + 6h = h^2 + 9h$$

و مشتق را حساب می کنیم:

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 9h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 9) = 9$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: با توجه به ضابطه g و به کمک تعریف مشتق $g'_+(1)$ و $g'_-(1)$ را به دست می‌آوریم.

$$g'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\overbrace{|x^2 - 1|}^+}{x - 1} \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1) \cancel{(x-1)} f(x)}{\cancel{x-1}} = 2 \overbrace{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)}^{a \text{ (باتوجه به نمودار)}} = 2(a) = 2a$$

$$g'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\overbrace{|x^2 - 1|}^-}{x - 1} \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\cancel{(x-1)} (x+1) f(x)}{\cancel{x-1}} = -2 \overbrace{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)}^{2 \text{ (باتوجه به نمودار)}} = -2(2) = -4$$

گام دوم: با توجه به تساوی داده‌شده در صورت سؤال خواهیم داشت:

$$g'_+(1) = 2g'_-(1) \Rightarrow 2a = 2(-4) \Rightarrow 2a = -8 \Rightarrow a = -4$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: خط مماس رسم‌شده از نقاط $A \begin{vmatrix} \alpha \\ 4\alpha - \alpha^2 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$ می‌گذرد که B مربوط به صفر تابع f است.

گام دوم: شیب خط مماس، برابر با مشتق تابع f در نقطه $x = \alpha$ است؛ پس داریم:

$$f'(x) = 4 - 3x^2 \Rightarrow f'(\alpha) = 4 - 3\alpha^2$$

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{4\alpha - \alpha^2 - 0}{\alpha - 2} = \frac{\alpha(4 - \alpha^2)}{\alpha - 2} = \frac{\alpha(2 - \alpha)(2 + \alpha)}{\alpha - 2} = -\alpha(\alpha + 2)$$

$$\Rightarrow f'(\alpha) = m_{AB} \Rightarrow 4 - 3\alpha^2 = -\alpha^2 - 2\alpha \Rightarrow 2\alpha^2 - 2\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - \alpha - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha - 2)(\alpha + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

با توجه به شکل مقدار α منفی است؛ پس $\alpha = -1$ قابل قبول است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: اگر نمودارهای دو تابع f و g در $X = X_0$ بر هم مماس باشند، هر دو تساوی $f(X_0) = g(X_0)$ و $f'(X_0) = g'(X_0)$ برقرار خواهند بود.

با توجه به این که مشتق تابع خطی که همان شیب خط است، معلوم است، مشتق تابع f را برابر شیب خط قرار می دهیم. فرض می کنیم طول نقطه تماس $X = \alpha$ باشد:

$$\left. \begin{array}{l} \text{شیب خط} = -\frac{1}{4} \\ f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \end{array} \right\} \Rightarrow f'(\alpha) = \frac{-2}{(\alpha-1)^2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow (\alpha-1)^2 = 8 \Rightarrow \alpha-1 = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow \alpha = 1 \pm 2\sqrt{2}$$

گام دوم: مقادیر قابل قبول برای α را در ضابطه f جای گذاری می کنیم:

$$\alpha = 1 - 2\sqrt{2} \Rightarrow f(\alpha) = \frac{1 - 2\sqrt{2} + 1}{1 - 2\sqrt{2} - 1} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = 1 + 2\sqrt{2} \Rightarrow f(\alpha) = \frac{1 + 2\sqrt{2} + 1}{1 + 2\sqrt{2} - 1} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

گام سوم: حالا مختصات دو نقطه $(1 - 2\sqrt{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$ و $(1 + 2\sqrt{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$ باید در معادله خط صدق کنند:

$$1 - 2\sqrt{2} + 4(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = k_1 \Rightarrow k_1 = 5 - 4\sqrt{2}$$

$$1 + 2\sqrt{2} + 4(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) = k_2 \Rightarrow k_2 = 5 + 4\sqrt{2}$$

$$k_1 k_2 = 25 - 32 = -7$$

حاصل ضرب این دو مقدار برابر است با:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: عبارت داخل پرانتز را ضابطه یک تابع مثل g در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = (g(x))^6$$

و طبق رابطه مشتق مرکب داریم:

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= 6g'(x)(g(x))^5 \\ g(-1) &= \frac{\sqrt{1-3(-1)}}{7+(-1)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(-1) = \frac{6 \times 1^5}{3^5} g'(-1) \Rightarrow f'(-1) = \frac{2}{81} g'(-1) \quad (*)$$

گام دوم: حالا مشتق تابع g را حساب می‌کنیم:

$$g'(x) = \frac{(\sqrt{1-3x})'(7+x) - (7+x)'(\sqrt{1-3x})}{(7+x)^2} = \frac{\left(\frac{-3}{2\sqrt{1-3x}}\right)(7+x) - (1)(\sqrt{1-3x})}{(7+x)^2}$$

$$\Rightarrow g'(-1) = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)(6) - 2}{6^2} = \frac{-13}{72}$$

گام سوم: و در نهایت طبق رابطه (*) داریم:

$$f'(-1) = \frac{2}{81} \times \left(-\frac{13}{72}\right) = -\frac{13}{2916} \Rightarrow [f'(-1)] = -1$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۹۲

گام اول: تابع در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است، پس در بازه $(-\infty, 1)$ هم مشتق پذیر است؛ یعنی در تمام نقاط صحیح این بازه هم مشتق پذیر است. حال از آنجا که تابع $y = [x]$ در تمام نقاط صحیح مشتق ناپذیر است، ضریب C باید برابر صفر باشد: $\Rightarrow C = 0$

گام دوم: هر دو ضابطه در دامنه هایشان پیوسته و مشتق پذیر هستند. برای این که در کل $\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشند، کافی است در

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx + 1; & x < 1 \\ \sqrt{2x+7}; & x \geq 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x=1 \text{ مشتق داشته باشند:} \\ \text{پس در این نقطه باید پیوسته باشد:} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^3 + bx + 1) = a + b + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = \sqrt{2(1)+7} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow a + b + 1 = 3 \Rightarrow a + b = 2 \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3ax^2 + b; & x < 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2x+7}}; & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{گام سوم: حالا باید از تابع مشتق بگیریم:}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'_-(1) = 3a + b \\ f'_+(1) = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow 3a + b = \frac{1}{3} \quad (2) \quad \begin{array}{l} \text{و مشتق های چپ و راست در } x=1 \text{ را برابر قرار می دهیم:} \\ \text{گام چهارم: دستگاه معادلات (1) و (2) را حل می کنیم:} \end{array}$$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + b = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow (3a + b) - (a + b) = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3} \Rightarrow 2a = -\frac{5}{3} \Rightarrow a = -\frac{5}{6}$$

گام پنجم: خواسته سؤال را حساب می کنیم:

$$c - \frac{b}{a} = 0 - \frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{5} = 3/4$$

جای گذاری $\rightarrow -\frac{5}{6} + b = 2 \Rightarrow b = \frac{17}{6}$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

با توجه به این که در نقاط $x=1, 2$ تابع صفر می شود فقط کافی است از عامل صفرشونده مشتق بگیریم و در مابقی ضرب کنیم تا شیب خط مماس محاسبه شود:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \end{array} \right] m &= \frac{-1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times 2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ y=0 \end{array} \right] m &= \frac{1 \times 2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times 3} = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \end{aligned} \Rightarrow \text{نقطه برخورد} \Rightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{11}{5} \\ y = -\frac{2}{5} \end{array} \right] \quad \sqrt{\frac{121}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{125}{25}} = \frac{5\sqrt{5}}{5}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

از آنجا که خطوط مماس بر خطی با شیب -1 عمود هستند. پس مشتق منحنی مربوطه را محاسبه کرده و برابر با 1 قرار می دهیم.

$$y' = \frac{\Delta(3x+3) - 3(\Delta x - a)}{(3x+3)^2} = \frac{15 + 3a}{9(x+1)^2} = \frac{5+a}{3(x+1)^2} = 1 \Rightarrow 5+a = 3x^2 + 6x + 3 \Rightarrow 3x^2 + 6x - 2 - a = 0$$

جواب های معادله بالا، نقاط تماس می باشند. با توجه به داده سؤال، حاصل ضرب دو جواب معادله برابر با -3 است.

$$-3 = \frac{C}{A} = \frac{-2-a}{3} \Rightarrow a = 7 \quad 3x^2 + 6x - 9 = 0 \rightarrow 3(x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

معادله منحنی را بازنویسی می کنیم و یکی از ریشه های به دست آمده را جایگذاری می نماییم.

$$y = \frac{\Delta x - 7}{3x+3} \xrightarrow{x=1} y = \frac{\Delta(1) - 7}{2(1)+3} = -\frac{1}{3}$$

$$y = -x - b \xrightarrow{(1, -\frac{1}{3})} b = \frac{-2}{3} \rightarrow ab = 7 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{14}{3}$$

نقطه $(1, -\frac{1}{3})$ در خط $y = -x - b$ صدق می کند، به این ترتیب b به دست می آید.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۹۴

$$f(x) = x \frac{x^r + x^r}{(x+1)^r} = \frac{x^r(x+1)}{(x+1)^r} = \frac{x^r}{(x+1)} \rightarrow f'(x) = \frac{rx^r(x+1) - x^r}{(x+1)^r} \quad f'(1) = \frac{r-1}{4} = \frac{5}{4} \quad 95$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

می‌دانیم اگر تابعی از درجه دوم باشد آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[\alpha, \beta]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $\frac{\alpha+\beta}{2}$ برابر است. چون fog و gof هر دو از درجه ۲ هستند، پس ابتدا برای یافتن آهنگ تغییر متوسط تابع fog در بازه $[-2, 4]$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{-2+4}{2} = 1 &\Rightarrow \text{آهنگ متوسط} = (fog)'(1) \\ (fog)'(1) &= (gof)'(\alpha) \\ \Rightarrow g'(1)f'(g(1)) &= f'(\alpha) \cdot g'(f(\alpha)) \quad \begin{cases} g'(x) = 4x-1 \\ f'(x) = -\frac{1}{x} \end{cases} \quad \text{یعنی:} \\ \Rightarrow 3 \times -\frac{1}{2} &= -\frac{1}{2} \left(4 \left(2 - \frac{\alpha}{2} \right) - 1 \right) \\ \Rightarrow 3 &= 8 - 2\alpha - 1 \Rightarrow 2\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 2 \end{aligned}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

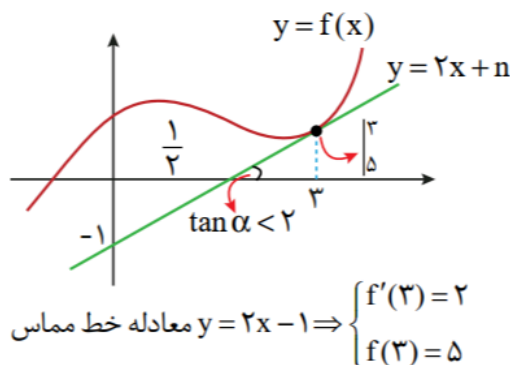
از طرفین مشتق می‌گیریم. 97

$$2f'(2x) = g\left(\frac{2}{x}\right) - \frac{2}{x} g'\left(\frac{2}{x}\right)x = g\left(\frac{2}{x}\right) - \frac{2}{x} g'\left(\frac{2}{x}\right)$$

حال دوباره مشتق می‌گیریم.

$$\begin{aligned} 4f''(2x) &= -\frac{2}{x^2} g'\left(\frac{2}{x}\right) + \frac{2}{x^2} g'\left(\frac{2}{x}\right) + \frac{4}{x^3} g''\left(\frac{2}{x}\right) \\ 4f''(2x) &= \frac{4}{x^3} g''\left(\frac{2}{x}\right) \stackrel{x=1}{=} f''(2) = g''(2) \Rightarrow \frac{f''(2)}{g''(2)} = 1 \end{aligned}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$\begin{aligned} g(x^3 f(x+2)) &= x^2 + 2x \xrightarrow{\text{مشتق}} \\ (3x^2 f(x+2) + f'(x+2)x^3) g'(x^3 f(x+2)) &= 2x + 2 \\ (3f(3) + f'(3)) g'(f(3)) &= 4 \\ x=1 &\Rightarrow (3 \times 5 + 2 \times 1) g'(\Delta) = 4 \Rightarrow g'(\Delta) = \frac{4}{17} \quad 98 \end{aligned}$$

۹۹

یک خط به شرطی بر نمودار تابع مشتق‌پذیر f در نقطه‌ای به طول α مماس است که معادله حاصل از تلاقی آنها ریشه مضاعف α داشته باشد.

$$\frac{bx+a}{x+\Delta} = x+a \Rightarrow$$

$$x^2 + \Delta x + ax + \Delta a = bx + a$$

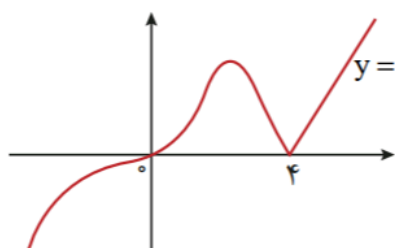
$$\Rightarrow x^2 + (a-b+\Delta)x + \Delta a = 0$$

قرار است این معادله ریشه مضاعف ۲- داشته باشد پس:

$$x^2 + (a-b+\Delta)x + \Delta a = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$\begin{cases} a-b+\Delta=4 \\ \Delta a=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b=2 \\ a=1 \end{matrix} \Rightarrow f(x) = \frac{2x+1}{x+\Delta} \Rightarrow f(b) = f(2) = \frac{\Delta}{2}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)



$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x^2 & x \geq 4 \text{ یا } x \leq 0 \\ 4x^2 - x^3 & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 8x & x > 4 \text{ یا } x < 0 \\ 8x - 3x^2 & 0 \leq x < 4 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = \frac{8}{3}$$

۱۰۰

چون $f'_+(4) \neq f'_-(4)$ پس f در $x=4$ مشتق ندارد اما $f'(0)=0$.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$\begin{cases} f(x) = 2x \\ f'(x) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+7=2 \\ 2a+b+10=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -3, b = -2$$

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2ax + b$$

حال $f(x) - 2x$ را به عامل $(x-1)^2$ تجزیه می‌کنیم.

$$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = (x-1)^2(x^2 + 4x + 4) = (x-1)^2(x+2)^2$$

پس $\alpha = -2$ است.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۰۱

دو تابع و همچنین مشتق آنها را در نقطه $x=1$ برابر هم قرار می‌دهیم.

از طرفین مشتق می گیریم:

۱۰۲

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{2}{x}\right) &= g(\sqrt{x}) \xrightarrow{\text{مشتق}} \\
 -\frac{2}{x^2} f'\left(\frac{2}{x}\right) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} g'(\sqrt{x}) \xrightarrow{x=1} -2f'(2) = \frac{1}{2} g'(1) \xrightarrow{g'(1)=2} f'(2) = -\frac{1}{2} \\
 \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{+4}{x^3} f'\left(\frac{2}{x}\right) + \frac{4}{x^4} f''\left(\frac{2}{x}\right) &= \frac{-1}{4x\sqrt{x}} g'(\sqrt{x}) + \frac{1}{4x} g''(\sqrt{x}) \\
 \xrightarrow{x=1} 4f'(2) + 4f''(2) &= \frac{-1}{4} g'(1) + \frac{1}{4} g''(1) \\
 g''(x) = \frac{-6}{x^4} \Rightarrow g''(1) &= -6 \\
 \Rightarrow 4 \times -\frac{1}{2} + 4f''(2) &= -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \\
 \Rightarrow -2 + 4f''(2) = -2 \Rightarrow f''(2) &= 0
 \end{aligned}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

نکته: هرگاه f تابعی درجه ۲ باشد آهنگ تغییر متوسط در بازه $[\alpha, \beta]$ آهنگ تغییر لحظه ای در $\frac{\alpha+\beta}{2}$ برابر است. پس:

۱۰۳

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 6x + 3$$

$$f'(2) = \frac{f(\alpha) - f(-1)}{\alpha - (-1)} = f'\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)$$

با توجه به فرض:

$$\Rightarrow 15 = 6 \frac{\alpha-1}{2} + 3 \Rightarrow 3\alpha = 15 \Rightarrow \alpha = 5$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

در حد داده شده، حد مخرج کسر در $x=2$ برابر صفر است و جواب حد عدد $-\frac{3}{7}$ است. پس حد صورت نیز در $x=2$ برابر صفر است.

۱۰۴

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f^3(x) + 1 = 0 \Rightarrow f^3(2) + 1 = 0 \Rightarrow f^3(2) = -1 \Rightarrow f(2) = -1$$

اکنون به کمک تعریف مشتق در $x=2$ ، یعنی $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ داریم:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^3(x) + 1}{x^3 + 3x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f(x) + 1)(f^2(x) - f(x) + 1)}{(x-2)(x+5)} = -\frac{3}{7} \xrightarrow{f(2)=-1} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - f(x) + 1}{x+5} = -\frac{3}{7} \\
 &= f'(2) \times \frac{f^2(2) - f(2) + 1}{2+5} = f'(2) \times \frac{3}{7} = -\frac{3}{7} \Rightarrow f'(2) = -1
 \end{aligned}$$

حال خواسته مسئله را به دست می آوریم:

$$y = x^3 f(x) \Rightarrow y' = 3x^2 f(x) + f'(x) \cdot x^3 \xrightarrow{x=2} y' = 4f(2) + 4f'(2) \xrightarrow{\substack{f(2)=-1 \\ f'(2)=-1}} y' = -4 - 4 = -8$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۰۵

فرض کنیم خط مماس بر تابع که از نقطه $A(3, -7)$ می‌گذرد، در نقطه $B(\alpha, \beta)$ بر تابع f مماس شده باشد، پس اولاً $f(\alpha) = \beta$ و دوماً $f'(\alpha)$ برابر شیب خط مماس است.

پس داریم:

$$f(\alpha) = \frac{\alpha+2}{3\alpha-5} \Rightarrow B(\alpha, \frac{\alpha+2}{3\alpha-5})$$

$$A(3, -7), B(\alpha, \frac{\alpha+2}{3\alpha-5}) \Rightarrow m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\alpha+2}{3\alpha-5} + 7}{\alpha-3} = \frac{22\alpha-33}{(3\alpha-5)(\alpha-3)}$$

از طرفی داریم:

$$f'(x) = \frac{1(3x-5) - 3(x+2)}{(3x-5)^2} = \frac{-11}{(3x-5)^2} \Rightarrow f'(\alpha) = \frac{-11}{(3\alpha-5)^2} = \text{شیب خط مماس}$$

شیب خط AB و شیب خط مماس با هم برابرند، بنابراین:

$$\frac{22\alpha-33}{(3\alpha-5)(\alpha-3)} = \frac{-11}{(3\alpha-5)^2} \Rightarrow \frac{2\alpha-3}{\alpha-3} = \frac{-1}{3\alpha-5} \Rightarrow 6\alpha^2 - 10\alpha - 9\alpha + 15 = -\alpha + 3 \Rightarrow 6\alpha^2 - 18\alpha + 12 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 6} \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \Rightarrow m = -\frac{11}{4} \\ \alpha = 2 \Rightarrow m = -11 \end{cases} \quad \text{حال با توجه به رابطه } m = f'(\alpha) = \frac{-11}{(3\alpha-5)^2} \text{ مقدار شیب را به دست می‌آوریم:}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۰۶

در حد $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x)+2}{2x^2+x-6}$ ، حد مخرج در $x = -2$ برابر صفر است. پس حد صورت نیز در $x = -2$ برابر صفر است؛ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow -2} (g(x)+2) = 0 \Rightarrow g(-2) = -2$$

اکنون با تجزیه مخرج و به کمک تعریف مشتق در $x = -2$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x)+2}{(x+2)(2x-3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x)-g(-2)}{x+2} \times \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{2x-3} = g'(-2) \times \frac{1}{-7} \xrightarrow[\text{فرض سؤال}]{\text{با توجه به}} -\frac{1}{7} g'(-2) = -\frac{2}{7} \Rightarrow g'(-2) = 2$$

اکنون داریم:

$$f(x) = x^2 - \frac{4}{x} \Rightarrow f'(x) = 2x + \frac{4}{x^2} \quad (*)$$

$$y = (f \circ g)(x) \Rightarrow y' = g'(x) \cdot f'(g(x)) \xrightarrow{x=-2} y' = g'(-2) \cdot f'(g(-2)) \Rightarrow y' = 2 \times f'(-2)$$

با توجه به رابطه (*) داریم:

$$f'(-2) = -4 + \frac{4}{4} = -3$$

پس حاصل برابر است با:

$$(f \circ g)'(-2) = 2 \times (-3) = -6$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۰۷

برای آن که مشتق دوم را راحت تر محاسبه کنیم، ابتدا سعی می کنیم مخرج را در صورت بسازیم و ضابطه تابع را ساده کنیم، سپس تابع را به صورت توان کسری می نویسیم تا محاسبه مشتق ساده تر شود:

$$f(x) = \frac{2x-2}{\sqrt{2x-1}} = \frac{2x-1-1}{\sqrt{2x-1}} = \frac{2x-1}{\sqrt{2x-1}} - \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2x-1} - \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = (2x-1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{(2x-1)^{\frac{1}{2}}}$$

اکنون دو بار از تابع f مشتق می گیریم:

$$f(x) = (2x-1)^{\frac{1}{2}} - (2x-1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(2x-1)^{\frac{1}{2}-1} \times 2 - (-\frac{1}{2})(2x-1)^{-\frac{1}{2}-1} \times 2 = (2x-1)^{-\frac{1}{2}} + (2x-1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{1}{2}-1} \times 2 + (-\frac{3}{2})(2x-1)^{-\frac{3}{2}-1} \times 2 = -(2x-1)^{-\frac{3}{2}} - 3(2x-1)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f''(1) = -(1)^{-\frac{3}{2}} - 3 \times (1)^{-\frac{5}{2}} = -1 - 3 = -4$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۰۸

ابتدا $g(1)$ و $g'(1)$ را به دست می آوریم:

$$g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} g(1) = 1 + 1 = 2 \\ g'(1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

با توجه به فرض مسئله داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-f(x)}{2x^2-3x-2} = \frac{2}{5}$$

حد مخرج در $x=2$ برابر صفر است، پس حد صورت نیز در $x=2$ برابر صفر است و چون f در $x=2$ پیوسته و مشتق پذیر است، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2-f(x)) = 0 \Rightarrow f(2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-f(x)}{2x^2-3x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2)-f(x)}{(x-2)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{2x+1} = f'(2) \times (-\frac{1}{5}) = \frac{2}{5} \Rightarrow f'(2) = -2$$

حال داریم:

$$(fog)'(1) = g'(1) \cdot f'(g(1)) = (-\frac{1}{2})f'(2) = -\frac{1}{2} \times (-2) = 1$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

تابع $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x-2}} + 1$ را در نظر بگیرید. آنگاه دربارهٔ تابع f داریم:

$$f(x) = \frac{36}{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \times g(x) - 36 \times g'(x)}{(g(x))^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-36 \times g'(x)}{(g(x))^2} \quad (1)$$

اکنون به محاسبهٔ مشتق تابع g می‌پردازیم:

$$g(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x-2}} + 1 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{x^2-1}{x-2}\right)^2}} \times \frac{2x \times (x-2) - 1 \times (x^2-1)}{(x-2)^2} + 0$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{x^2-1}{x-2}\right)^2}} \times \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2} \quad (2)$$

اکنون با جایگذاری $x = 3$ در روابط (۱) و (۲) داریم:

$$(2) : g'(3) = \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{9-1}{1}\right)^2}} \times \frac{9-12+1}{1^2} = \frac{1}{1^2} \times (-2) = -\frac{1}{1}$$

$$(1) : f'(3) = \frac{-36 \times \left(-\frac{1}{1}\right)}{(1+1)^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

نمودار تابع f در دو نقطه بر نمودار g مماس است، پس معادلهٔ $f(x) = g(x)$ ریشهٔ مضاعف دارد. حال تابع $g(x) = 4 - |x-2|$ را بدون قدرمطلق می‌نویسیم و داریم:

حالت اول:

$$x \leq 2 \xrightarrow{|x-2| = -(x-2)} g(x) = 4 + x - 2 = x + 2$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 + 2ax + b = x + 2 \Rightarrow -x^2 + x(2a-1) + b-2 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta=0} (2a-1)^2 - 4(-1)(b-2) = 0 \Rightarrow 4a^2 - 4a + 4b - 7 = 0 \quad (1)$$

حالت دوم:

$$x \geq 2 \xrightarrow{|x-2| = x-2} g(x) = 4 - x + 2 = 6 - x$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 + 2ax + b = 6 - x \Rightarrow -x^2 + x(2a+1) + b-6 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta=0} (2a+1)^2 - 4(-1)(b-6) = 0 \Rightarrow 4a^2 + 4a + 4b - 23 = 0 \quad (2)$$

$$((2) - (1)) \Rightarrow 8a - 16 = 0 \Rightarrow a = 2$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

پاسخ: گزینه

گام اول: ابتدا الگوریتم تقسیم را می نویسیم:

گام دوم: حالا از عبارت مشتق می گیریم:

گام سوم: به جای x قرار می دهیم (-2) :

بنابراین باقی مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x + 2$ برابر $\frac{5}{4}$ می شود.

$$p(x) = (x^2 - 4x)Q(x) + x^2 - x + 1$$

$$p'(x) = (2x - 4)Q(x) + (x^2 - 4x)Q'(x) + 2x - 1$$

$$p'(-2) = 8Q(-2) + 0 \times Q'(-2) - 5 \Rightarrow 5 = 8Q(-2) - 5 \Rightarrow Q(-2) = \frac{5}{4}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: ابتدا دقت کنید که f در $x=1$ و $x=2$ پیوسته است، چون:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (-1)^{[x]} \times \underbrace{|x-1|}_{\text{مثبت}} \times (x-2) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-1) \times \underbrace{(x-1)}_{\text{صفر}} \times \underbrace{(x-2)}_{-1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1)^{[x]} \times \underbrace{|x-1|}_{\text{منفی}} \times (x-2) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 \times \underbrace{(-x+1)}_{\text{صفر}} \times \underbrace{(x-2)}_{-1} = 0 \\ f(1) &= (-1)^{[1]} \times |1-1| \times (1-2) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ در } x=1 \text{ پیوسته است.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (-1)^{[x]} \times \underbrace{|x-1|}_{\text{مثبت}} \times (x-2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 \times \underbrace{(x-1)}_1 \times \underbrace{(x-2)}_{\text{صفر}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (-1)^{[x]} \times \underbrace{|x-1|}_{\text{مثبت}} \times (x-2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-1) \times \underbrace{(x-1)}_1 \times \underbrace{(x-2)}_{\text{صفر}} = 0 \\ f(2) &= (-1)^{[2]} \times |2-1| \times (2-2) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ در } x=2 \text{ پیوسته است.}$$

گام دوم: حالا سراغ مشتق چپ و راست f در $x=1$ می‌رویم:

$$x=1 \text{ در } f \text{ راست} \Rightarrow x > 1 \Rightarrow \begin{cases} [x]=1 \\ |x-1|=x-1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = (-1)^1 \times \underbrace{(x-1)}_{\text{عامل صفرشونده}} \times (x-2)$$

$$\Rightarrow f'_+(1) = (-1) \times 1 \times (1-2) = +1$$

$$x=1 \text{ در } f \text{ چپ} \Rightarrow x < 1 \Rightarrow \begin{cases} [x]=0 \\ |x-1|=-x+1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = (-1)^0 \times \underbrace{(-x+1)}_{\text{عامل صفرشونده}} \times (x-2)$$

$$\Rightarrow f'_-(1) = 1 \times (-1) \times (1-2) = +1$$

$f'_-(1) = f'_+(1)$ است؛ پس f در $x=1$ مشتق پذیر می‌شود.

گام سوم: در آخر مشتق چپ و راست f در $x=2$ را هم بررسی می‌کنیم:

$$x=2 \text{ در } f \text{ راست} \Rightarrow x > 2 \Rightarrow \begin{cases} [x]=2 \\ |x-1|=x-1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = (-1)^2 \times (x-1) \times \underbrace{(x-2)}_{\text{عامل صفرشونده}}$$

$$\Rightarrow f'_+(2) = 1 \times (2-1) \times 1 = 1$$

$$x=2 \text{ در } f \text{ چپ} \Rightarrow x < 2 \Rightarrow \begin{cases} [x]=1 \\ |x-1|=x-1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = (-1)^1 \times (x-1) \times \underbrace{(x-2)}_{\text{عامل صفرشونده}}$$

$$\Rightarrow f'_-(2) = -1 \times (2-1) \times 1 = -1$$

$f'_-(2) \neq f'_+(2)$ است؛ پس f در $x=2$ مشتق پذیر نیست.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۱۳

روش اول: گام اول: اول سراغ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f^2(1)}{x^2 - 1}$ می‌رویم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f^2(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \frac{f(x) + f(1)}{x + 1} = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}}_{\text{تعریف مشتق}} \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + f(1)}{x + 1}}_{\frac{f(1) + f(1)}{1 + 1} = f(1)} = f'(1) \cdot f(1)$$

گام دوم: از طرفی: $f(x^2) = 3x^2 - x + 1 \xrightarrow{x=1} f(1) = 3$

گام سوم: حالا از طرفین معادله $f(x^2) = 3x^2 - x + 1$ مشتق می‌گیریم:

$$\Rightarrow 2xf'(x^2) = 6x^2 - 1$$

با جای‌گذاری $x = 1$ در معادله بالا داریم:

$$2f'(1) = 6 \Rightarrow f'(1) = 3 \Rightarrow f(1) \cdot f'(1) = 3 \times 3 = 9$$

روش دوم: حاصل حد داده‌شده در صورت سؤال را به کمک هوییتال هم می‌توانیم محاسبه کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f^2(1)}{x^2 - 1} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)f'(x)}{x} = f(1) \cdot f'(1)$$

ادامه مانند روش اول.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۱۴

گام اول: عبارت زیر رادیکال را تجزیه می‌کنیم:

$$x^2 - 3x + 2 = \underbrace{x^2 - x}_{x(x-1)} + \underbrace{x^2 - 3x + 2}_{(x-1)(x-2)} = (x-1) \underbrace{(x^2 + x - 2)}_{(x-1)(x+2)} = (x-1)^2 (x+2)$$

$$x^2 + ax - 1 - a = \underbrace{x^2 - 1}_{(x-1)(x+1)} + \underbrace{ax - a}_{a(x-1)} = (x-1)(x+1+a)$$

بنابراین ضابطه f به شکل زیر می‌شود:

$$f(x) = \sqrt[3]{\underbrace{(x^2 - 3x + 2)}_{(x-1)^2(x+2)} \underbrace{(x^2 + ax - 1 - a)}_{(x-1)(x+1+a)}} = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)(x+1+a)} = (x-1) \sqrt[3]{(x+2)(x+1+a)}$$

گام دوم: حالا به کمک عامل صفرشونده $x - 1$ ، $f'(1)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \underbrace{(x-1)}_{\text{عامل صفرشونده}} \sqrt[3]{(x+2)(x+1+a)} \Rightarrow f'(1) = 1 \times \sqrt[3]{(1+2)(1+1+a)} = \sqrt[3]{3(2+a)} = \sqrt[3]{12} \Rightarrow a = 2$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: خط $5x - 2y = 1$ یا همان $y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$ در نقطه‌ای به طول ۱- بر نمودار تابع f مماس است. شیب این خط

شیب

برابر $\frac{5}{2}$ است و با جای گذاری $x = -1$ در آن، $y = -3$ می‌شود؛ پس:

$$\Rightarrow \begin{cases} f(-1) = -3 \\ f'(-1) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

گام دوم: f تابعی متناوب با دوره تناوب ۴ است؛ پس:

$$f(x) = f(x+4) \Rightarrow \dots = f(-9) = f(-5) = f(-1) = f(3) = \dots = -3$$

از طرفی، چون f در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است، داریم:

$$f'(x) = f'(x+4) \Rightarrow \dots = f'(-9) = f'(-5) = f'(-1) = f'(3) = \dots = \frac{5}{2}$$

گام سوم: مقدار $g(3)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$g(x) = f\left(\frac{1-x}{2}\right) + 2f(3x-2) - \frac{1}{2}f(5x-24)$$

$$g(3) = \underbrace{f(-1)}_{-3} + \underbrace{2f(7)}_{-3} - \frac{1}{2}\underbrace{f(-9)}_{-3} = -\frac{15}{2}$$

$$f\left(\frac{1-x}{2}\right) \xrightarrow[\text{مشتق داخل}]{\text{مشتق}} -\frac{1}{2}f'\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

گام چهارم: حالا سراغ $g'(3)$ می‌رویم. اول باید از g مشتق بگیریم:

$$2f(3x-2) \xrightarrow[\text{مشتق داخل}]{\text{مشتق}} 3 \times 2f'(3x-2) = 6f'(3x-2)$$

$$-\frac{1}{2}f(5x-24) \xrightarrow[\text{مشتق داخل}]{\text{مشتق}} -\frac{5}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)f'(5x-24) = -\frac{5}{4}f'(5x-24)$$

$$g'(x) = -\frac{1}{2}f'\left(\frac{1-x}{2}\right) + 6f'(3x-2) - \frac{5}{4}f'(5x-24)$$

پس:

$$\Rightarrow g'(3) = -\frac{1}{2}\underbrace{f'(-1)}_{\frac{5}{2}} + \underbrace{6f'(7)}_{\frac{5}{2}} - \frac{5}{4}\underbrace{f'(-9)}_{\frac{5}{2}} = \frac{15}{2}$$

گام پنجم:

نکته معادله خط مماس بر تابع f در نقطه‌ای به طول $x = \alpha$ واقع بر آن برابر است با:

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

پس با توجه به نکته بالا، معادله خط مماس بر تابع g در نقطه‌ای به طول $x = 3$ روی آن به صورت زیر است:

$$y - g(3) = g'(3)(x - 3) \Rightarrow y - \left(-\frac{15}{2}\right) = \frac{15}{2}(x - 3) \Rightarrow y + \frac{15}{2} = \frac{15}{2}x - \frac{45}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{15}{2}x - \frac{45}{2} - \frac{15}{2} \Rightarrow y = \frac{15}{2}x - \underbrace{\frac{60}{2}}_{\text{عرض از مبدأ}}$$

بنابراین عرض از مبدأ خط مماس برابر -30 است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۱۶

گام اول: اگر با دقت به عبارت $g(x) = f(x)(f(x) + xf'(x))$ نگاه کنیم، متوجه می‌شویم که $f(x) + xf'(x)$ ، همان مشتق $xf(x)$ است؛ پس $g(x) = f(x)(xf(x))'$ می‌شود.

گام دوم: $(xf(x))'$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \Rightarrow xf(x) = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow (xf(x))' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow g(x) = f(x)(xf(x))' = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1$$

گام سوم: $g(x)$ تابع ثابت $y=1$ است؛ پس مقدار مشتق آن در همه نقاط (از جمله در $x = \sqrt[3]{3}$) برابر صفر می‌شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۱۷

گام اول: حد تابع f در $x \rightarrow 3/5$ نامتناهی است؛ پس مخرج f (یعنی $cx - 7$) باید در $x = 3/5$ برابر صفر شود:

$$cx - 7 = 0 \xrightarrow{x=3/5} 3/5c - 7 = 0 \Rightarrow c = 2$$

گام دوم: حالا حاصل حد در بی‌نهایت f را (به کمک هم‌ارزی پرتوان) محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c + 0/5 \xrightarrow{c=2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax+b}{2x-7} = 2/5$$

$$\xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{2x} = 2/5 \Rightarrow \frac{a}{2} = 2/5 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow f(x) = \frac{5x+b}{2x-7}$$

گام سوم:

نکته ضابطه وارون تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

طبق نکته بالا، داریم:

$$f(x) = \frac{5x+b}{2x-7} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{7x+b}{2x-5}$$

گام چهارم: برای این که f و f^{-1} بر هم مماس باشند، باید معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ ریشه مضاعف داشته باشد:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{5x+b}{2x-7} = \frac{7x+b}{2x-5} \Rightarrow 14x^2 + (2b-49)x - 7b = 10x^2 + (2b-25)x - 5b \Rightarrow \overset{A}{4x^2} - \overset{B}{24x} + \overset{C}{-2b} = 0$$

دلتای این معادله باید برابر صفر باشد:

$$\Delta = 24^2 - 4 \times 4(-2b) = 0 \Rightarrow 576 + 32b = 0 \xrightarrow{\div 32} 18 + b = 0 \Rightarrow b = -18$$

هم‌چنین، ریشه مضاعف این معادله، همان طول رأس تابع درجه دوم، یعنی $\alpha = -\frac{B}{2A} = -\frac{24}{8} = 3$ است؛ پس طول نقطه تماس، یعنی α

هم برابر ۳ می‌شود.

$$\Rightarrow \alpha - b = 3 - (-18) = 21$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{x+1}{x}}} = \frac{1}{1 + \frac{x}{x+1}} = \frac{1}{\frac{2x+1}{x+1}} = \frac{x+1}{2x+1}$$

$x \neq 0$
 $x \neq -1$
 $x \neq -\frac{1}{2}$

بنابراین دامنهٔ f به صورت $\mathbb{R} - \{0, -1, -\frac{1}{2}\}$ می‌شود.

گام دوم: حالا دامنهٔ fof را به دست می‌آوریم:

$$D_{\text{fof}} = \{x \in D_f \cap f(x) \in D_f\} = \underbrace{\{x \in \mathbb{R} - \{0, -1, -\frac{1}{2}\}\}}_{x \neq \{0, -1, -\frac{1}{2}\}} \cap \underbrace{\{\frac{x+1}{2x+1} \in \mathbb{R} - \{0, -1, -\frac{1}{2}\}\}}_{\frac{x+1}{2x+1} \neq \{0, -1, -\frac{1}{2}\}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{2x+1} \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \\ \frac{x+1}{2x+1} \neq -1 \Rightarrow x \neq -\frac{2}{3} \\ \frac{x+1}{2x+1} \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow x \neq -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$D_{\text{fof}} = \{x \notin \{0, -1, -\frac{1}{2}\}\} \cap \{x \notin \{-1, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}\}\} = x \notin \{0, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}\}$$

پس:

$$\Rightarrow D_{\text{fof}} = \mathbb{R} - \{0, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}\}$$

گام سوم: حالا با توجه به این که fof تابعی گویا است، فقط در ۵ نقطه از $\mathbb{R}$ (نقاط $0, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}$) مشتق ناپذیر است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: اول پیوستگی f در $x=1$ را بررسی می کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 1 \\ x+2 & x < 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x+1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x+2 = 3 \\ f(1) &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ در } x=1 \text{ پیوسته است.}$$

گام دوم: مشتق چپ و راست f در $x=1$ را محاسبه می کنیم:

$$\left. \begin{aligned} f \text{ در } x=1 \text{ مشتق ناپذیر است.} \\ f(x) = 2x+1 \Rightarrow f'_+(1) = 2 \\ f(x) = x+2 \Rightarrow f'_-(1) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

گام سوم: f در تمام نقاط دامنه اش به جز در $x=1$ مشتق پذیر است و $\mathbb{R}$ در gof مشتق پذیر است، یعنی با این که f در $x=1$ مشتق ناپذیر است، ولی gof در $x=1$ مشتق پذیر است؛ پس $(\text{gof})'_+(1) = (\text{gof})'_-(1)$ می شود.

$$\Rightarrow \underbrace{f'_+(1)}_2 \cdot \underbrace{(\text{gof})'_+(1)}_{g'(f(1^+))} = \underbrace{f'_-(1)}_1 \cdot \underbrace{(\text{gof})'_-(1)}_{g'(f(1^-))} \quad (*)$$

از طرفی:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 1 \\ x+2 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+1) = 2 \times 1^+ + 1 = 2^+ + 1 = 3^+ \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+2) = 1^- + 2 = 3^- \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2g'_+(3) = g'_-(3) \Rightarrow \frac{g'_+(3)}{g'_-(3)} = \frac{1}{2}$$

پس (*) به شکل مقابل می شود:

گام چهارم: در آخر، مشتق راست و چپ تابع $y = [-\frac{5}{x}]g(x)$ در $x=3$ را محاسبه می کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \text{مشتق راست: } y = [-\frac{5}{x}]g(x) \Rightarrow y'_+(3) &= -2g'_+(3) \\ \text{مشتق چپ: } y = [-\frac{5}{x}]g(x) \Rightarrow y'_-(3) &= -2g'_-(3) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{نسبت}} \frac{y'_+(3)}{y'_-(3)} = \frac{-2g'_+(3)}{-2g'_-(3)} = \frac{g'_+(3)}{g'_-(3)} = \frac{1}{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: ابتدا دقت کنید که با جای گذاری $x = \frac{1}{9}$ در $\frac{(fog)(x)}{9x-1}$ ، مخرج برابر صفر می شود، ولی حاصل حد در همه

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{9})^-} (fog)(x) = 0$$

گزینه ها عدد است؛ پس صورت هم باید برابر صفر شود:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{9})^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{9})^-} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}-1}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

گام دوم: اول مقدار g در $x \rightarrow (\frac{1}{9})^-$ را محاسبه می کنیم:

اما دقت کنید که باید حاصل حد را کمی دقیق تر محاسبه کنیم:

$$x \rightarrow (\frac{1}{9})^- \Rightarrow x < \frac{1}{9} \Rightarrow x-1 < \frac{1}{9} \xrightarrow{\text{رادیکال}} \sqrt{x-1} < \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{\sqrt{x-1}} > 3$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{9})^-} g(x) = 3^+$$

پس:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{9})^-} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - m}{|2-x|} \overset{-4}{[-x]} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - m}{x-2} \times (-4) = \frac{9-m}{1} \times (-4)$$

مقدار این حد باید برابر صفر باشد؛ پس $m = 9$ می شود.

گام چهارم: حالا داریم: $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{9})^-} \frac{f(g(x))}{9x-1}$ برابر صفر صفرم است، می توانیم از هویپیتال کمک بگیریم:

$$\xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{9})^-} \frac{g'(x)f'(g(x))}{9} \quad (*)$$

گام پنجم: باید مقدار $g'(x)$ در $x \rightarrow (\frac{1}{9})^-$ را به دست آوریم:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} = (x-1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{(x-1)^3}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{9})^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{9})^-} -\frac{1}{2\sqrt{(x-1)^3}} = -\frac{1}{2\sqrt{(\frac{1}{9}-1)^3}} = -\frac{1}{2 \times \frac{1}{27}} = -\frac{27}{2} \quad (I)$$

گام ششم: حالا باید مقدار $f'(g(x))$ در $x \rightarrow (\frac{1}{9})^-$ را محاسبه کنیم. دقت کنید در گام دوم دیدیم که $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{9})^-} g(x) = 3^+$ است؛ پس:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{9})^-} f'(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = f'_+(3)$$

برای محاسبه مشتق راست f در $x = 3$ داریم:

عامل صفرشونده

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{|2-x|} [-x] \xrightarrow{x \rightarrow 3^+ \Rightarrow [-x] = -4, |2-x| = x-2} f'(x) = \frac{2x}{x-2} \times (-4) \Rightarrow f'_+(3) = \frac{6}{1} \times (-4) = -24 \quad (II)$$

$$\frac{-\frac{27}{2} \times (-24)}{9} = 36$$

گام هفتم: در آخر با جای گذاری (I) و (II) در (*) داریم:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۲۱

گام اول: از f مشتق می‌گیریم تا آهنگ تغییر لحظه‌ای به دست آید:

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - a}{4x^2 - 2x + 3a} \Rightarrow f'(x) = \frac{(4x-1)(4x^2-2x+3a) - (2x^2-x-a)(8x-2)}{(4x^2-2x+3a)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2 \cdot ax - 5a}{(4x^2-2x+3a)^2}$$

گام دوم: با توجه به ضابطه f' ، واضح است که مقدار f' فقط به ازای ریشه صورت، یعنی $x = \frac{1}{4}$ برابر A می‌شود.

گام سوم: از طرفی، مخرج عبارتی درجه دوم است که معادله محور تقارن آن $x_s = \frac{1}{4}$ است و صورت، تابعی خطی است که ریشه آن برابر $\frac{1}{4}$ است؛ پس اگر α و β نسبت به $\frac{1}{4}$ قرینه باشند (یا به عبارتی دیگر $\frac{1}{4}$ واسطه حسابی α و β باشد)، مقدار f' در α و β قرینه هم می‌شوند. حالا طبق گفته سؤال، می‌خواهیم آهنگ تغییر لحظه‌ای f (یا همان مقدار f') در نقاط B و C قرینه باشد، پس x_C و x_B باید نسبت به $\frac{1}{4}$ قرینه باشند، بنابراین $\frac{1}{4}$ واسطه حسابی x_B و x_C می‌شود که در این صورت $x_B + x_C = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ است؛ پس جواب برابر $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ است؛ پس $x_B + x_C = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ می‌شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۲۲

گام اول: اول کمی معادله $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$ را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy \Rightarrow f(x+y) - f(x) = f(y) + xy \xrightarrow{y \neq 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \frac{f(y)}{y} + \frac{xy}{y}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y}}_{\text{تعریف مشتق } f \text{ در } x} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{f(y)}{y} + \frac{xy}{y} \right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y} + \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{y}}_x$$

گام سوم: حالا با توجه به این که $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 4$ است، می‌توانیم بگوییم حاصل $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y}$ هم برابر ۴ می‌شود:

$$\Rightarrow f'(x) = 4 + x \Rightarrow f'(1) = 5$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۲۳

ابتدا $g \circ f$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g \circ f(x) = (2 - \sqrt{x + 4\sqrt{x} + 4})^2 = (2 - \sqrt{(\sqrt{x} + 2)^2})^2 = (2 - \sqrt{x} - 2)^2 = -x\sqrt{x} \Rightarrow (g \circ f)'(x) = (-x\sqrt{x})'$$

$$(g \circ f)'(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)'(4) = f'(4) \cdot g'(f(4)) = -\frac{2}{3}\sqrt{4} = -\frac{4}{3}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$f'(x) = -\frac{b}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2b}{x^3}$$

مخرج کسر حد باید صفر باشد، چون جواب حد صفر نیست.

$$f(1) + f''(1) = 0 \Rightarrow a + b + 2b = 0 \Rightarrow a = -3b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{f(x) + f''(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{a + \frac{b}{x} + \frac{2b}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3(x-1)}{ax^3 + bx^2 + 2b}$$

$$\xrightarrow{a=-3b} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{-3bx^3 + bx^2 + 2b} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(-3bx^2 - 2bx - 2b)} = \frac{1}{-3b - 2b - 2b} = -\frac{1}{7b}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{7b} = \frac{1}{7} \\ a = -3b \end{cases} \Rightarrow b = -1, \quad a = 3$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)